УДК 519.853.4

В.И. НОРКИН, Б.О. ОНИЩЕНКО

МИНОРАНТНЫЕ МЕТОДЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Ключевые слова: *стохастическая глобальная оптимизация, невыпуклое стохастическое программирование, метод ветвей и границ, метод Пиявского, стохастические границы, касательные миноранты.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются численные методы решения задач стохастической глобальной оптимизации, использующие в той или иной степени понятие касательной миноранты (стохастической касательной миноранты) целевой функции. В частности, известный метод детерминированной глобальной оптимизации Пиявского и метод ветвей и границ обобщаются для решения задач стохастической глобальной оптимизации (функций математического ожидания и вероятности).

Метод Пиявского [1–3] неоднократно «переоткрывался» и является одним из популярных методов детерминированной глобальной оптимизации [4]. Он имеет две эквивалентные формы: для оптимизации функций максимума и функций, допускающих так называемые касательные миноранты [5]. Понятие касательных минорант — ключевое для данного метода. Основная проблема метода Пиявского в многомерном случае — решение вспомогательных аппроксимирующих многоэкстремальных задач.

Метод ветвей и границ — один из основных методов дискретной и глобальной детерминированной оптимизации [4]. Он характеризуется способом разбиения исходного допустимого множества (например, на параллелепипеды, симплексы и т.п.), видом оценок оптимального значения целевой функции на подмножестве (релаксация ограничений, двойственные оценки и др.), стратегией измельчения разбиения. Основное отличие разных вариантов метода заключается в способе получения оценок снизу оптимального значения целевой функции на фрагменте разбиения области поиска.

Задача стохастической оптимизации состоит в минимизации функции математического ожидания или вероятности. Трудность данной задачи в том, что ее целевая функция не может быть вычислена точно, а известны только статистические оценки ее значений и, возможно, градиентов. Проблема состоит в нахождении локальных и глобальных минимумов задачи с использованием этих оценок. Решению задач выпуклой стохастической оптимизации посвящена обширная литература [6, 7]. Задачи и методы нахождения локальных минимумов в невыпуклых стохастических задачах оптимизации обсуждаются в [8]. Ряд задач стохастической глобальной оптимизации и стохастический метод ветвей и границ для их решения изучаются в [9–11], где оценки ветвей (подзадач) получаются с помощью приема перестановочной релаксации, т.е. перестановки операций минимизации и интегрирования (взятия математического ожидания или вероятности). В работах [12–14] указанный стохастический метод ветвей и границ применяется для глобальной оптимизации вероятностей с приложениями к контролю загрязнения окружающей среды, а в [15, 16] — к задачам оптимальной маршрутизации и управления проектами. В настоящей статье с иллюстративной целью решается невыпуклая негладкая задача размещения методами стохастической глобальной оптимизации.

Основной результат данной работы, обобщающей [17–19], состоит в распространении детерминированного метода Пиявского и классического метода ветвей и границ на задачи стохастической глобальной оптимизации (функций математического ожидания и вероятности).

Общей чертой рассматриваемых методов является использование касательных минорант целевой функции задачи как источника глобальной информации об этой функции. Таким образом, ключевое значение имеют способы построения касательных минорант. Например, в качестве таких минорант могут применяться касательные конусы, использующие значения функции и ее константу Липшица, или касательные параболоиды, использующие значения функции, ее градиенты и константу Липшица градиентов. При применении вместо конусов касательных параболоидов эффективность метода значительно увеличивается [18]. В работе [5] развито исчисление касательных минорант для сложных невыпуклых целевых функций. В настоящей статье приведены новые способы вычисления касательных минорант, в частности для функций минимума и максимума, а также стохастических минорант для функций типа математического ожидания и вероятности. Введение стохастических минорант подобно обобщению градиентного метода для решения детерминированных задач до стохастического квазиградиентного метода решения задач стохастического программирования. Нахождение детерминированных минорант, как и детерминированных градиентов функций математического ожидания, может быть проблематично, однако вычисление и применение стохастических минорант и стохастических квазиградиентов вполне возможно.

Другой общей чертой рассматриваемых методов стохастической глобальной оптимизации является использование последовательности равномерных аппроксимаций целевой функции и касательных минорант этих аппроксимаций. Таким образом, получаем новые модификации метода Пиявского и метода ветвей и границ для решения так называемых предельных экстремальных задач, в которых целевая функция оптимизируется через последовательность аппроксимирующих функций.

Радикально решена проблема решения вспомогательных аппроксимирующих задач в многомерном методе Пиявского: решаем их не точно (что очень трудно), а приближенно — путем разбиения области поиска на подсимплексы и поиска подсимплекса с наименьшей оценкой снизу аппроксимирующей функции. Тогда этот вариант метода, по существу, превращается в метод ветвей и границ с минорантными оценками ветвей.

Важной чертой классического метода ветвей и границ является возможность отбрасывания бесперспективных ветвей. Однако этого нельзя делать при использовании стохастических оценок ветвей в задачах стохастического программирования, поскольку есть вероятность потери глобального экстремума. В одной из модификаций метода ветвей и границ не отбрасываем ветви (подмножества разбиения) с плохими оценками, а агрегируем их, т.е. возвращаемся назад к более грубому разбиению области поиска, но делаем это не более чем конечное число раз.

1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ МИНОРАНТЫ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим задачу стохастической глобальной оптимизации

$$\min_{x \in X} [F(x) = Ef(x, \theta)] \tag{1}$$

или

$$\min_{x \in X} [P(x) = P\{f(x, \theta) \geq 0\}], \tag{2}$$

где θ — случайный параметр; E — символ математического ожидания (expectation) по θ; $f(x,\theta)$ — некоторая непрерывная по x и интегрируемая по θ функция; $\theta \in \Theta$; (Θ, Σ, P) — вероятностное пространство задачи; $P\{\cdot\}$ — символ вероятности; X — непрерывное или дискретное множество.

Будем предполагать, что функции $f(\cdot,\theta)$ при каждом θ допускают касательные в точках y миноранты $\varphi(x,y,\theta)$, и, таким образом, неявно предполагаем [5], что функции $f(\cdot,\theta)$ являются функциями максимума: $f(x,\theta) = \max_{y \in X} \varphi(x,y,\theta)$. Фактически, будем рассматривать задачи глобальной оптимизации вида

$$\begin{gathered} \min_{x \in X}[F(x) = E \max_{y \in Y} \psi(x,y,\theta)], \\ (\min_{x \in X}[F(x) = E \min_{y \in Y} \psi(x,y,\theta)]), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \min_{x \in X}[P(x) = P\{\max_{y \in Y} \psi(x,y,\theta) \geqslant 0\}], \\ (\min_{x \in X}[P(x) = P\{\min_{y \in Y} \psi(x,y,\theta) \geqslant 0\}]), \end{gathered} \tag{4}$$

где Y — некоторое конечное или бесконечное множество. Это стохастические минимаксные (миниминные) задачи. Их приложения и некоторые методы локальной оптимизации рассмотрены в работах [6, 20].

Определение 1 [5]. Пусть X — топологическое пространство, функции $F(x)$, $x \in X$, и $\varphi(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$, связаны условиями:

а) $F(x) \geqslant \varphi(x,y)$ для всех $x \in X$, $y \in X$;

б) $F(y) = \varphi(y,y)$ для всех $y \in X$;

в) функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Тогда функции $\{\varphi(\cdot,y),\ y \in X\}$ называются касательными (в точках y) минорантами для $F(x)$.

Определение 2. Функция $\varphi(x,y)$ называется непрерывной по $x \in X$ равностепенно по $y \in Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ (не зависящее от y) такое, что для любых $y \in Y$ и $x^1, x^2 \in X$, $\|x^1 - x^2\| \leqslant \delta$, будет $|\varphi(x^1,y) - \varphi(x^2,y)| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 1. Если функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y), то она равномерно непрерывна по (x,y) и, следовательно, непрерывна по x равностепенно по y.

Таким образом, если $\lim_{k \to \infty} \varphi(x^k, y^k) = \varphi(x,y)$ для любых последовательностей $x^k \to x$, $y^k \to y$, то функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Замечание 1. Аналогично определяются касательные мажоранты. С.А. Пиявский [1] рассматривал непрерывные по (x,y) миноранты, В.И. Норкин [5] изучал непрерывные по x равностепенно по y миноранты, а О. Хамисов [21] рассматривал вогнутые, возможно, разрывные по x миноранты.

Касательные миноранты тесно связаны с функциями максимума. С одной стороны, для функций максимума легко строятся касательные миноранты, с другой — функции, допускающие касательные миноранты, являются функциями максимума.

Лемма 2 [5]. Если $f(x) = \max_{z \in Z} \psi(x,z) = \psi(x,z(x))$ — функция максимума, где $\psi(x,y)$ непрерывна по x равностепенно по $z \in Z$, то, очевидно, функция $\varphi(x,y) = \psi(x,z(y))$ является касательной в точке y минорантой для $f(x)$.

Теорема 1 [5]. Если $\{\varphi(\cdot, y)\}_{y \in X}$ — семейство касательных минорант функции $f(\cdot)$ в смысле определения 1, то $f(\cdot)$ непрерывна и представима в виде функции максимума: $f(x) = \sup_{y \in X} \varphi(x, y)$.

С целью решения задач стохастического программирования введем понятие стохастических касательных минорант.

Определение 3. Функции $\{\phi(\cdot, y, \theta),\ y \in X,\ \theta \in \Theta\}$, где Θ — носитель некоторого вероятностного пространства (Θ, Σ, P), называются стохастическими касательными минорантами для $F(x)$, если функции $\phi(x, y, \theta)$ измеримы по θ, а математические ожидания $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ конечны и для каждого $y \in X$ являются касательными в точке y минорантами для $F(x)$ (в смысле определения 1).

Следующая лемма показывает, что в качестве стохастических касательных минорант функции математического ожидания $F(x) = Ef(x, \theta)$ можно брать касательные миноранты подынтегральной функции $f(x, \theta)$. Здесь ситуация аналогична вычислению стохастических градиентов функции математического ожидания [6].

Лемма 3 [17]. Предположим, что функция $f(\cdot, \theta)$ допускает касательные миноранты $\phi(x, y, \theta)$ в точках $y \in X$, т.е. почти для всех θ выполнено:

1) $f(x, \theta) \geqslant \phi(x, y, \theta)$ для всех $x \in X,\ y \in X$;

2) $f(y, \theta) = \phi(y, y, \theta)$ для всех $y \in X$;

3) функция $\phi(x, y, \theta)$ непрерывна по (x, y) почти для всех θ;

4) $\phi(x, y, \theta)$ измерима по θ для любых $x, y \in X$;

5) $|\phi(x, y, \theta)| \leqslant M(\theta)$ для всех $x, y \in X$ с некоторой интегрируемой функцией $M(\theta)$.

Тогда функции $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ непрерывны и являются касательными минорантами для функции математического ожидания $F(x) = Ef(x, \theta)$.

Доказательство. Условия а), б) определения 1 следуют из условий 1), 2). Непрерывность $\varphi(x, y)$ и, таким образом, условие в) определения 1 следуют из условий 3), 4) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости и из леммы 1.

Замечание 2. Касательные миноранты функции вероятности $P(x) = P\{f(x, \theta) \geqslant 0\}$ строятся аналогично, а именно, в качестве касательной в точке y миноранты $P(x)$ можно взять функцию $\phi(x, y) = P\{\phi(x, y, \theta) \geqslant 0\}$, где $\phi(x, y, \theta)$ — касательная в точке y миноранта функции $f(x, \theta)$.

Предположим теперь, что подынтегральная функция в (1) явно представима в виде функции максимума. Следующая теорема является стохастическим аналогом леммы 2.

Теорема 2. Пусть $F(x) = Ef(x, \theta)$. Предположим, что для каждого $\theta \in \Theta$ справедливо:

1) $f(x, \theta) = \sup\limits_{z \in Z} \psi(x, y, \theta) = \psi(x, z(x, \theta), \theta),\ x \in X,$

где Z — компактное множество, $z(x, \theta)$ — однозначное (x, θ)-измеримое сечение отображения $Z(x, \theta) = \arg\max_{z \in Z} \psi(x, z, \theta)$;

2) $\psi(x, z, \theta)$ непрерывна по (x, z) и измерима по θ;

3) $|\psi(x, z, \theta)| \leqslant M(\theta)$ для любых (x, z) с интегрируемой функцией $M(\theta)$.

Тогда функции $\{\phi(x, y, \theta) = \psi(x, z(y, \theta), \theta)\}_{y \in X}$ образуют семейство касательных в точке y минорант для $f(x, \theta)$ и, следовательно, функции $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ образуют касательные миноранты для $F(x) = Ef(x, \theta)$.

Доказательство. Непрерывность $f(x, \theta)$ при каждом θ следует из условия 2) и теоремы 1. Существование (x, θ)-измеримого сечения $z(x, \theta) \in Z(x, \theta)$

где θ — случайный параметр; E — символ математического ожидания (expectation) по θ; $f(x, \theta)$ — некоторая непрерывная по x и интегрируемая по θ функция; $\theta \in \Theta$; (Θ, Σ, P) — вероятностное пространство задачи; $P\{\cdot\}$ — символ вероятности; X — непрерывное или дискретное множество.

Будем предполагать, что функции $f(\cdot, \theta)$ при каждом θ допускают касательные в точках y миноранты $\varphi(x, y, \theta)$, и, таким образом, неявно предполагаем [5], что функции $f(\cdot, \theta)$ являются функциями максимума: $f(x, \theta) = \max_{y \in X} \varphi(x, y, \theta)$. Фактически, будем рассматривать задачи глобальной оптимизации вида

$$\begin{gathered} \min_{x \in X}[F(x) = E \max_{y \in Y} \psi(x, y, \theta)], \\ (\min_{x \in X}[F(x) = E \min_{y \in Y} \psi(x, y, \theta)]), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \min_{x \in X}[P(x) = P\{\max_{y \in Y} \psi(x, y, \theta) \geqslant 0\}], \\ (\min_{x \in X}[P(x) = P\{\min_{y \in Y} \psi(x, y, \theta) \geqslant 0\}]), \end{gathered} \tag{4}$$

где Y — некоторое конечное или бесконечное множество. Это стохастические минимаксные (миниминные) задачи. Их приложения и некоторые методы локальной оптимизации рассмотрены в работах [6, 20].

Определение 1 [5]. Пусть X — топологическое пространство, функции $F(x)$, $x \in X$, и $\varphi(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$, связаны условиями:

а) $F(x) \geqslant \varphi(x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in X$;

б) $F(y) = \varphi(y, y)$ для всех $y \in X$;

в) функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Тогда функции $\{\varphi(\cdot, y), \ y \in X\}$ называются касательными (в точках y) минорантами для $F(x)$.

Определение 2. Функция $\varphi(x, y)$ называется непрерывной по $x \in X$ равностепенно по $y \in Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ (не зависящее от y) такое, что для любых $y \in Y$ и $x^1, x^2 \in X$, $\|x^1 - x^2\| \leqslant \delta$, будет $|\varphi(x^1, y) - \varphi(x^2, y)| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 1. Если функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y), то она равномерно непрерывна по (x, y) и, следовательно, непрерывна по x равностепенно по y.

Таким образом, если $\lim_{k \to \infty} \varphi(x^k, y^k) = \varphi(x, y)$ для любых последовательностей $x^k \to x$, $y^k \to y$, то функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Замечание 1. Аналогично определяются касательные мажоранты. С.А. Пиявский [1] рассматривал непрерывные по (x, y) миноранты, В.И. Норкин [5] изучал непрерывные по x равностепенно по y миноранты, а О. Хамисов [21] рассматривал вогнутые, возможно, разрывные по x миноранты.

Касательные миноранты тесно связаны с функциями максимума. С одной стороны, для функций максимума легко строятся касательные миноранты, с другой — функции, допускающие касательные миноранты, являются функциями максимума.

Лемма 2 [5]. Если $f(x) = \max_{z \in Z} \psi(x, z) = \psi(x, z(x))$ — функция максимума, где $\psi(x, y)$ непрерывна по x равностепенно по $z \in Z$, то, очевидно, функция $\varphi(x, y) = \psi(x, z(y))$ является касательной в точке y минорантой для $f(x)$.

Теорема 1 [5]. Если $\{\varphi(\cdot, y)\}_{y \in X}$ — семейство касательных минорант функции $f(\cdot)$ в смысле определения 1, то $f(\cdot)$ непрерывна и представима в виде функции максимума: $f(x) = \sup_{y \in X} \varphi(x, y)$.

С целью решения задач стохастического программирования введем понятие стохастических касательных минорант.

Определение 3. Функции $\{\phi(\cdot, y, \theta),\ y \in X,\ \theta \in \Theta\}$, где Θ — носитель некоторого вероятностного пространства (Θ, Σ, P), называются стохастическими касательными минорантами для $F(x)$, если функции $\phi(x, y, \theta)$ измеримы по θ, а математические ожидания $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ конечны и для каждого $y \in X$ являются касательными в точке y минорантами для $F(x)$ (в смысле определения 1).

Следующая лемма показывает, что в качестве стохастических касательных минорант функции математического ожидания $F(x) = Ef(x, \theta)$ можно брать касательные миноранты подынтегральной функции $f(x, \theta)$. Здесь ситуация аналогична вычислению стохастических градиентов функции математического ожидания [6].

Лемма 3 [17]. Предположим, что функция $f(\cdot, \theta)$ допускает касательные миноранты $\phi(x, y, \theta)$ в точках $y \in X$, т.е. почти для всех θ выполнено:

1) $f(x, \theta) \geqslant \phi(x, y, \theta)$ для всех $x \in X,\ y \in X$;

2) $f(y, \theta) = \phi(y, y, \theta)$ для всех $y \in X$;

3) функция $\phi(x, y, \theta)$ непрерывна по (x, y) почти для всех θ;

4) $\phi(x, y, \theta)$ измерима по θ для любых $x, y \in X$;

5) $|\phi(x, y, \theta)| \leqslant M(\theta)$ для всех $x, y \in X$ с некоторой интегрируемой функцией $M(\theta)$.

Тогда функции $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ непрерывны и являются касательными минорантами для функции математического ожидания $F(x) = Ef(x, \theta)$.

Доказательство. Условия а), б) определения 1 следуют из условий 1), 2). Непрерывность $\varphi(x, y)$ и, таким образом, условие в) определения 1 следуют из условий 3), 4) по теореме Лебега о мажорируемой сходимости и из леммы 1.

Замечание 2. Касательные миноранты функции вероятности $P(x) = P\{f(x, \theta) \geqslant 0\}$ строятся аналогично, а именно, в качестве касательной в точке y миноранты $P(x)$ можно взять функцию $\phi(x, y) = P\{\phi(x, y, \theta) \geqslant 0\}$, где $\phi(x, y, \theta)$ — касательная в точке y миноранта функции $f(x, \theta)$.

Предположим теперь, что подынтегральная функция в (1) явно представима в виде функции максимума. Следующая теорема является стохастическим аналогом леммы 2.

Теорема 2. Пусть $F(x) = Ef(x, \theta)$. Предположим, что для каждого $\theta \in \Theta$ справедливо:

1) $f(x, \theta) = \sup\limits_{z \in Z} \psi(x, y, \theta) = \psi(x, z(x, \theta), \theta),\ x \in X,$

где Z — компактное множество, $z(x, \theta)$ — однозначное (x, θ)-измеримое сечение отображения $Z(x, \theta) = \arg\max_{z \in Z} \psi(x, z, \theta)$;

2) $\psi(x, z, \theta)$ непрерывна по (x, z) и измерима по θ;

3) $|\psi(x, z, \theta)| \leqslant M(\theta)$ для любых (x, z) с интегрируемой функцией $M(\theta)$.

Тогда функции $\{\phi(x, y, \theta) = \psi(x, z(y, \theta), \theta)\}_{y \in X}$ образуют семейство касательных в точке y минорант для $f(x, \theta)$ и, следовательно, функции $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ образуют касательные миноранты для $F(x) = Ef(x, \theta)$.

Доказательство. Непрерывность $f(x, \theta)$ при каждом θ следует из условия 2) и теоремы 1. Существование (x, θ)-измеримого сечения $z(x, \theta) \in Z(x, \theta)$

вытекает из измеримости отображения $Z(x, \theta)$ [22, § 8.1]. Тогда функция $\phi(x, y, \theta) = \psi(x, z(y, \theta), \theta)$ измерима по θ. Непрерывность $F(x)$ следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Условия а), б) вытекают из соотношений:

$$f(x, \theta) = \psi(x, z(x, \theta), \theta) \geqslant \psi(x, z(y, \theta), \theta) = \phi(x, y, \theta),$$

$$f(y, \theta) = \psi(y, z(y), \theta) = \phi(y, y, \theta).$$

Проверим условие в). Пусть $x^k \to x$, $y^k \to y$. В силу полунепрерывности сверху $Z(y, \theta)$ и компактности Z можем считать, что $z(y^k, \theta) \to z \in Z(y, \theta)$. Поэтому имеем

$$\phi(x^k, y^k, \theta) = \phi(x^k, z(y^k, \theta), \theta) \to \psi(x, z, \theta) = \psi(x, z(y, \theta), \theta) = \phi(x, y, \theta).$$

Таким образом, функции $\phi(x, y, \theta) = \psi(x, z(y), \theta)$ непрерывны по (x, y) и, следовательно, по лемме 2 непрерывны по x равностепенно по y.

Теорема 2 указывает способ построения стохастических касательных минорант для функции максимума, в том числе и для функции дискретного максимума. В частности, если $f(x, \theta) = |\psi(x, \theta)| = \max\{-\psi(x, \theta), \psi(x, \theta)\}$ и функции $\psi(x, \theta)$ имеют соответствующие касательные минораты и мажоранты, то миноранты $f(x, \theta)$ строятся в соответствии с этой теоремой.

Рассмотрим другие способы построения стохастических касательных минорант.

Касательные конусы. Если функции $f(x, \theta)$ — липшицевы (гельдеровы) с интегрируемой по θ константой Липшица $L(\theta)$ и показателем α:

$$|f(x^1, \theta) - f(x^2, \theta)| \leqslant L(\theta) \| x^1 - x^2 \|^{\alpha} \quad \forall x^1, x^2 \in X, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

то в качестве касательной в точке y миноранты для $f(x, \theta)$ можно взять функцию

$$\phi(x, y, \theta) = f(y, \theta) - L(\theta) \| x - y \|^{\alpha}.$$

Следует заметить, что здесь возможны разные нормы, например, для n-мерного вектора z можно использовать норму $\| z \| = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \right)^{1/2}$ или $\| z \| = \max\limits_{1 \le i \le n} |z_i|$.

Касательные параболоиды. Для гладких по x функций $f(x, \theta)$ с липшицевым градиентом (с константой $L_1(\theta)$) в качестве стохастических касательных минорант можно использовать касательные к графику $f(\cdot, \theta)$ в точках y параболоиды:

$$\phi(x, y, \theta) = f(y, \theta) + \frac{1}{2L_1(\theta)} \| \nabla f(y, \theta) \|^2 - \frac{L_1(\theta)}{2} \left\| x - y - \frac{1}{L_1(\theta)} \nabla f(y, \theta) \right\|^2.$$

Рассмотрим еще несколько способов построения касательных минорант.

Миноранты сложных функций. Пусть $f(x) = f_0(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in X$, где X — топологическое пространство, $f_0(z)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция на множестве $Y = \{f_1(x), \ldots, f_m(x) \in R^m | \, y \in X\}$. Функции $f_i(\cdot)$, $i = \overline{1, m}$, имеют касательные миноранты $\varphi_i(x, y)$, $i = \overline{1, m}$. Тогда функции $\{\varphi(\cdot, y) = f_0(\varphi_1(\cdot, y), \ldots, \varphi_m(\cdot, y))\}_{y \in X}$ являются касательными минорантами для $f(x)$ [5].

Миноранты разности выпуклых функций. Если функция $f(x)$ представима в виде разности двух выпуклых на компакте $X \in R^n$ функций $f^1(x)$ и $f^2(x)$, т.е. $f(x) = f^1(x) - f^2(x)$, то функции $\{\varphi(x, y, \theta) = f^1(y) + \langle g(y), x - y \rangle - f^2(x)\}_{y \in X}$, где $g(y)$ — обобщенный градиент функции $f(\cdot)$ в точке y, являются вогнутыми касательными минорантами для $f(x)$ на X [5].

Миноранты функции минимума. Пусть $f(x) = \inf_{z \in Z} \psi(x, z)$ и функции $\psi(\cdot, z)$ для всех $z \in Z$ допускают (вогнутые) касательные в точках y миноранты $\phi(x, y, z)$. Тогда функция $\varphi(x, y) = \inf_{z \in Z} \phi(x, y, z)$ является (вогнутой) касательной в y минорантой для $f(x)$.

2. О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА ПИЯВСКОГО

Ограничимся случаем задачи без общих ограничений

$$F(x) \to \min_{x \in X}. \tag{5}$$

Задачи глобальной оптимизации с общими ограничениями обсуждаются в работах [4, 5].

2.1. Метод Пиявского для решения предельной экстремальной задачи. Предположим, что целевая функция $F(x)$ в задаче (5) не известна точно, а имеется последовательность $\{F^k(x)\}$, сходящаяся к $F(x)$ равномерно на X, причем известны касательные миноранты $\varphi^k(x, y)$ функций $F^k(x)$.

Для приближенного решения задачи (5) можно выбрать достаточно большое k_0 и найти глобальный минимум функции $F^{k_0}(x)$. Для уточнения полученного решения нужно взять большее $k_1 > k_0$ и заново решить задачу глобальной оптимизации функции $F^{k_1}(x)$, и т.д. Однако желательно иметь процедуру, которая для уточнения приближенного решения использует результаты вычислений, полученные на предыдущих шагах. Для этой цели построим аналог метода Пиявского для решения задачи (5) с помощью касательных минорант $\varphi^k(x, y)$ последовательности функций $F^k(x)$. В дальнейшем применим этот подход для решения задачи стохастической глобальной оптимизации.

Алгоритм 1. Точки $y^0, \ldots, y^{k_0} \in X$ произвольны. Пусть уже построены точки $y^0, \ldots, y^k \in X$.

Точку y^{k+1}, $k \geqslant k_0$, найдем как решение специальной многоэкстремальной задачи

$$\varphi_k(x) = \max_{0 \le i \le k} \varphi^k(x, y^i) \to \min_{x \in X}. \tag{6}$$

Таким образом, от предыдущих итераций $i = 0, 1, \ldots, k$ в задаче (6) остается только последовательность точек $\{y^i,\ i = 0, 1, \ldots, k\}$, а новая аппроксимация $\varphi_k(x)$ целевой функции $F(x)$ существенно отличается от старой аппроксимации $\varphi_{k-1}(x) = \max_{0 \le i \le k-1} \varphi^{k-1}(x, y^i)$.

Теорема 3 [18]. Предположим, что:

а) последовательность функций $\{F^k(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции $F(x)$;

б) касательные миноранты $\varphi(x, y)$ функции $F(x)$ непрерывны по x равностепенно по y;

в) касательные миноранты $\varphi^k(x, y)$ функций $F^k(x)$ равномерно сходятся на $X \times X$ к касательным минорантам $\varphi(x, y)$ исходной функции $F(x)$.

Тогда все предельные точки последовательности $\{y^k\}$ являются точками глобального минимума предельной экстремальной задачи (5).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 из [5]. В работе [18] рассматриваются также модификации метода Пиявского с некасательными минорантами.

2.2. Стохастический аналог метода Пиявского. Аппроксимируем задачу (1) эмпирическими средними:

$$\left[F_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x, \theta^i)\right] \to \min_{x \in X}, \tag{7}$$

где θ^i — независимые наблюдения случайного параметра θ. Если функции $F_k(x)$ равномерно сходятся к $F(x) = Ef(x, \theta)$ при $k \to \infty$, то вместо исходной задачи (1) можно решать приближенную задачу (7). Следующие утверждения обосновывают такой подход.

Теорема 4 [23] (о сходимости эмпирических аппроксимаций). Пусть функция $f(x, \theta)$ непрерывна по x для почти всех $\theta \in \Theta$ и измерима по θ для всех $x \in X$, X — компакт в R^n. Предположим, что семейство $\{f(x, \cdot), \ x \in X\}$ равномерно интегрируемо, т.е.

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{x \in X} \int_{\{\theta : f(x, \theta) \geq c\}} |f(x, \theta)| \, P(d\theta) = 0.$$

Тогда с вероятностью 1 функции $F_k(x)$ равномерно на X сходятся к $F(x) = Ef(x, \theta)$.

Замечание 3. Если $|f(x, \theta)| \leqslant M(\theta)$ для любого $x \in X$ с интегрируемой функцией $M(\theta)$, то семейство функций $\{f(x, \cdot), \ x \in X\}$ равномерно интегрируемо.

Пусть функции $\phi(x, y, \theta)$ являются касательными минорантами для случайных функций $f(x, \theta)$. Очевидно, функции

$$\varphi_k(x, y) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \phi(x, y, \theta^i) \tag{8}$$

являются касательными минорантами для $F_k(x)$. Тогда для решения приближенной детерминированной задачи (7) применим метод Пиявского.

Альтернативно, исходную задачу (1) можно решать через последовательность равномерных аппроксимаций (7) с помощью алгоритма 1.

Теорема 5 (о сходимости стохастического аналога метода Пиявского). Пусть целевая функция $F(x)$ задачи (1) аппроксимируется последовательностью эмпирических функций $F_k(x)$ из (7), имеющих касательные миноранты (8). Тогда в условиях леммы 3 и теоремы 4 последовательность $\{y^k\}$, порожденная алгоритмом 1, с вероятностью 1 сходится к множеству глобальных минимумов $F(x)$ на X.

Доказательство. Необходимо проверить условия сходимости из теоремы 3. Функции (8), очевидно, являются касательными минорантами для $F_k(x)$. Условие а) теоремы 3 выполнено с вероятностью 1 в силу теоремы 4. Условие б) для функций $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ следует из леммы 3. Условие в) для функций $\varphi^k(x, y)$ и $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ выполнено с вероятностью 1 в силу теоремы 4. Таким образом, утверждение теоремы следует из теоремы 3.

3.1. Минорантные границы оптимальных значений целевой функции в детерминированных задачах. Обозначим $F_* = \min_{x \in X} F(x)$.

Пусть $\{\varphi(x, y)\}_{y \in X}$ — семейство касательных в точках $y \in X$ минорант для $F(x)$, $\{y \in Z \subseteq X\}$ — некоторое конечное или бесконечное множество точек из X. Рассмотрим ряд оценок оптимального значения F_*, построенных на основе информации, заложенной в семействе касательных минорант $\{\varphi(x, y)\}_{y \in Z}$. Эти оценки будут использованы в разд. 4 в методе ветвей и границ для нахождения глобального минимума $F(x)$ на X.

Очевидно, что функция $\phi(x) = \max_{y \in Z} \varphi(x, y)$ — миноранта для $F(x)$, касательная во всех точках $y \in Z$, и величина

$$F_1 = \min_{x \in X} \phi(x)$$

является оценкой снизу для F_*.

Рассмотрим величину

$$F_2 = \max_{x \in X} \min_{y \in Z} \varphi(x, y).$$

Лемма 4 [19]. Предположим, что выпуклая оболочка со Z некоторого конечного множества точек $Z \subset X$ совпадает с компактом X, а миноранты имеют вид $\varphi(x, y) = \psi(y, \|x - y\|)$, $y \in Z$, причем $\psi(y, \cdot)$ монотонно убывает и непрерывна по второму аргументу. Тогда $F_2 \leqslant F_1 \leqslant F_*$.

Величина $F_3 = \min_{y \in Z} \varphi(\bar{x}, y) \leqslant F_2$ при любом $\bar{x} \in X$ в условиях леммы 4 является оценкой снизу для F_*. Оценка F_3 тем лучше, чем ближе $\bar{x}$ к оптимальной точке x^*.

Очевидно, что

$$F_4 = \max_{y \in Z} \min_{x \in X} \varphi(x, y) \leqslant F_*.$$

Если X — многогранник (например, параллелепипед или симплекс), а $\varphi(x, y)$ вогнута или квазивогнута по x, то $\min_{x \in X} \varphi(x, y)$ достигается в вершинах многогранника X. Если при этом множество Z конечно, то вычисление F_* не представляет труда.

Сравнение эффективности различных границ $F_1, F_2, \ldots$ на численных примерах решения задач глобальной оптимизации методом ветвей и границ имеется в [19].

3.2. Минорантные границы оптимальных значений функции математического ожидания $F(x) = Ff(x, \theta)$. Если вероятностная мера дискретна, то операция взятия математического ожидания сводится к суммированию: $F(x) = \sum_{\theta \in \Theta} p_\theta f(x, \theta)$, где p_θ — значения вероятности элементарного события θ.

В случае общей вероятностной меры аппроксимируем задачу (1) эмпирическими средними (7).

Функция $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ — касательная в точке y миноранта $F(x) = Ef(x, \theta)$. С ее помощью можно построить аналоги границ $F_1, \ldots, F_4$, например:

$$\Phi_1 = \min_{x \in X} \max_{y \in X} E\phi(x, y, \theta),$$

$$\Phi_2 = \max_{x \in X} \min_{y \in X} E\phi(x, y, \theta),$$

$$\Phi_3 = \min_{y \in X} E\phi(\bar{x}, y, \theta) \leq \Phi_2, \quad \bar{x} \in X,$$

$$\Phi_4 = \max_{y \in X} \min_{x \in X} E\phi(x, y, \theta).$$

Если $\phi(x, y, \theta) = \psi(y, \theta, \|x - y\|)$ и ψ — монотонно убывающая по последнему аргументу функция ψ, например, $\phi(x, y, \theta) = f(y, \theta) - L(\theta)\|x - y\|$, то функция $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ удовлетворяет условиям леммы 4 и, таким образом, $\Phi_2 \leq \Phi_1$.

Границы $\Phi_1, \ldots, \Phi_4$ имеет смысл применять, если миноранты $\phi(x, y, \theta)$ вогнуты по x, в этом случае математические ожидания $E\phi(x, y, \theta)$ остаются вогнутыми по x. Тогда получение оценки Φ_2 сводится к задаче максимизации вогнутой функции $E\phi(x, y, \theta)$ на множестве X, а вычисление Φ_4 — к перебору значений вогнутых функций $E\phi(x, y, \theta)$, $y \in Z$, в вершинах многогранника X.

Следующие границы являются специфическими для функции математического ожидания:

$$\Phi_5 = \min_{x \in X} E \max_{y \in X} \phi(x, y, \theta) \geq \Phi_1,$$

$$\Phi_6 = E \min_{x \in X} \max_{y \in X} \phi(x, y, \theta) \leq \Phi_5,$$

$$\Phi_7 = E \max_{y \in X} \min_{x \in X} \phi(x, y, \theta).$$

Если X — многогранник и при каждом θ миноранта $\phi(\cdot, y, \theta)$ вогнута или квазивогнута по x, то $\min_{x \in X} \phi(x, y, \theta)$ достигается в вершинах X. Таким образом, оценку Φ_7 имеет смысл использовать, если миноранты $\phi(x, y, \theta)$ не являются вогнутыми, а только квазивогнуты по x.

Для специальных минорант вида $\phi(x, y, \theta) = \psi(y, \theta, \|x - y\|)$, удовлетворяющих при каждом θ условиям леммы 4, имеет место

$$\min_{x \in X} \max_{y \in X} \phi(x, y, \theta) \geq \max_{x \in X} \min_{y \in X} \phi(x, y, \theta),$$

и поэтому справедлива оценка

$$\Phi_7 = E\max_{x \in X} \min_{y \in X} \phi(x, y, \theta) \leq \Phi_6.$$

3.3. Границы оптимальных значений функции вероятности. Будем рассматривать задачу глобальной максимизации $P(x) = P\{f(x, \theta) \leq 0\}$ на выпуклом множестве X. Если $\phi(x, y, \theta)$ — касательная в точке y миноранта функции $f(x, \theta)$, то функция $\varphi(x, y) = P\{\phi(x, y, \theta) \leq 0\}$ — касательная (в точке y) мажоранта для $P(x)$, т.е. $P(x) \leq \varphi(x, y)$ и $P(y) = \varphi(y, y)$. Если функция $\phi(x, y, \theta)$ непрерывна по x, y почти для всех θ и $P\{\phi(x, y, \theta) = 0\} = 0$ для любых $x, y \in X$, то функция $\varphi(x, y) = P\{\phi(x, y, \theta) \leq 0\}$ непрерывна по x, y. Отсюда в силу теоремы 1 следует, что функция $P(x)$ также непрерывна. В качестве стохастических касательных мажорант можно взять индикаторные функции

$$\psi(x, y, \theta) = \begin{cases} 1, & \phi(x, y, \theta) \leq 0, \\ 0, & \phi(x, y, \theta) > 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi(x, y) = E\psi(x, y, \theta)$. Если $\phi(x, y, \theta)$ квазивогнутая по первому аргументу, то и $\psi(x, y, \theta)$ квазивыпукла по x. Аналогично математическим ожиданиям можно построить оценки сверху оптимальных значений функции вероятности $P(x)$ на множестве X, включающем конечное подмножество точек (касания) Z, например,

$$P_1 = E \min_{y \in Z} \max_{x \in X} \psi(x, y, \theta).$$

Нахождение максимума квазивыпуклой функции $\psi(x, y, \theta)$ на многограннике X сводится к перебору значений этой функции в вершинах многогранника.

4. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ С МИНОРАНТНЫМИ ОЦЕНКАМИ

Рассмотрим задачу глобальной минимизации непрерывной функции $F(x)$ на множестве $X \subset R^n$. Пусть есть последовательность функций $F_N(x)$, равномерно сходящаяся к $F(x)$ при $N \to \infty$. Например, для задачи стохастической глобальной оптимизации $F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x, \theta^k)$ в условиях теоремы 4 с вероятностью единица данная последовательность равномерно сходится к $F(x) = Ef(x, \theta)$. Для глобальной оптимизации функции $F(x)$ на X через последовательность $F_N(x)$ применим метод ветвей и границ, использующий оценки разд. 3 оптимальных значений функций $F_N(x)$ на подмножествах $X' \subset X$ специального вида (симплексах, параллелепипедах и т.п.). По существу, метод ветвей и границ с минорантыми оценками может трактоваться как метод Пиявского, в котором вспомогательные невыпуклые задачи (6) решаются не точно, а приближенно в виде нахождения рекордного множества Y_N.

4.1. Алгоритм с удалением ветвей. В методе ветвей и границ на каждой итерации N имеется текущее разбиение Σ_N исходного множества X. Для каждого элемента $Y \in \Sigma_N$ имеются текущие верхняя $U_N(Y)$ и нижняя $L_N(Y)$ оценки оптимального значения $F_N^* = \min_{y \in Y} F_N(y)$, т.е. $L_N(Y) \leq F_N^* \leq U_N(Y)$. Обозначим Y_N рекордное множество разбиения Σ_N, т.е. $L_N(Y_N) = \min_{Y \in \Sigma_N} L(Y)$. Алгоритм метода состоит из последовательности следующих операций.

Шаг 1 (ветвление). Пусть множество Y_N выбирается для ветвления, т.е. оно представляется в виде объединения нескольких подмножеств $Y_{Nk} \subset Y_N$, $k = 1, 2, \ldots$, так, что $Y_N = \cup_k Y_{Nk}$. Таким образом, новое разбиение имеет вид $\Sigma_{N+1} = (\Sigma_N \setminus Y_N) \cup (\cup_k Y_{Nk})$.

Шаг 2 (оценка). Для элементов $Y \in \Sigma_{N+1}$ нового разбиения Σ_{N+1} перевычисляются оценки $L_{N+1}(Y)$ и $U_{N+1}(Y)$ оптимального значения $F_{N+1}^* = \min_{y \in Y} F_{N+1}(y)$ функции $F_{N+1}(y)$ на элементе Y.

Шаг 3 (удаление). Если $N + 1 \geq M$, то из разбиения Σ_{N+1} удаляются бесперспективные множества Y' такие, что $L_{N+1}(Y') > \min_{Y \in \Sigma_{N+1}} U_{N+1}(Y) + \varepsilon$, и т.д.

Это стандартный метод ветвей и границ, за исключением того, что на каждой его итерации используются оценки подмножеств не на основе исходной функции $F(x)$, а на основе приближенных функций $F_N(x)$.

Обозначим $\varepsilon_M = \sup_{N \geq M} \sup_{x \in X} |F(x) - F_N(x)|$.

Очевидно, в силу равномерной сходимости $F_N(x)$ к $F(x)$ на X имеет место $\lim_{M \to \infty} \varepsilon_M = 0$.

Теорема 6 (о сходимости) [19]. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция, последовательность $\{F_N(x),\ N = 1, 2, \ldots\}$ равномерно сходится к $F(x)$ на X, $\varepsilon_M \leq \varepsilon / 2$. Предположим, оценки подмножеств обладают свойством, что $\lim_{N \to \infty} (U_N(Z_N) - L_N(Z_N)) = 0$ для любой последовательности множеств

$\{Z_N\}$ такой, что $\operatorname{diam}(Z_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Предположим, что разбиения осуществляются так, что диаметры получающихся множеств стремятся к нулю при неограниченном числе делений. Тогда последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна и для любой предельной точки y рекордных множеств Y_N выполнено

$$F(y) - \min_{x \in X} F(x) \le 2\varepsilon_M.$$

4.2. Алгоритм с объединением ветвей. В следующем алгоритме экономия вычислений достигается за счет групповой оценки подмножеств. Он отличается от алгоритма п. 4.1 только шагом 3, на котором бесперспективные подмножества не удаляются, а объединяются в более крупные множества.

Шаг 3 (объединение подмножеств). Подмножества $Y_i' \in \Sigma_{N+1}$, такие, что $L_{N+1}(Y') > \min_{Y \in \Sigma_{N+1}} U_{N+1}(Y) + \varepsilon$, и $\cup_i Y_i' \in \Sigma_N$ агрегируются в одно множество Y'', т.е. подмножества Y_i' удаляются из Σ_{N+1}, а объединенное множество Y'' добавляется в Σ_{N+1}.

Под деревом разбиений (ветвлений) будем понимать граф в виде дерева, вершинам (узлам) которого соответствуют подмножества разбиения, а вершины, подчиненные данной, соответствуют подмножествам разбиения соответствующего ей подмножества-родителя.

Теорема 7 (о сходимости). Пусть выполнены предположения теоремы 6. Предположим также, что каждое подмножество дерева разбиений может участвовать в процедуре объединения не более чем некоторое фиксированное число раз, зависящее лишь от его положения (глубины) в дереве разбиений. Тогда $\operatorname{diam}(Y_N) \to 0$ и для любой предельной точки y рекордных множеств Y_N выполнено $F(y) = \min_{x \in X} F(x)$.

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{diam}(Y_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Обозначим Y_N^* подмножество разбиения, содержащее глобальный минимум x^*, тогда

$$L_N(Y_N^*) \le \min_{x \in Y_N^*} F_N(x) \le \min_{x \in Y_N^*} F(x) + \varepsilon_N = F(x^*) + \varepsilon_N.$$

Предположим, что $\lim_{k \to \infty} Y_{N_k} = y$. Покажем, что y является оптимальной точкой задачи. Предположим противное, что $F(y) - \min_{x \in X} F(x) = \varepsilon > 0$. Так как $L_N(Y_N) \le \min_{x \in Y_N} F_N(x) \le U_N(Y_N)$ и $U_N(Y_N) - L(Y_N) \to 0$, в силу равномерной сходимости $F_N \Rightarrow F$ выполнено $\lim_{k \to \infty} L_{N_k}(Y_{N_k}) = F(y)$ и, следовательно, для достаточно больших k имеет место

$$L_{N_k}(Y_{N_k}) \ge F(y) - \varepsilon / 2 \ge \min_{x \in X} F(x) + \varepsilon / 2.$$

Таким образом, для достаточно больших k имеем

$$L_{N_k}(Y_{N_k}) \ge \min_{x \in X} F(x) + \varepsilon / 2 \ge L_{N_k}(Y_{N_k}^*) + \varepsilon / 2 - \varepsilon_{N_k},$$

что противоречит определению Y_{N_k} как рекордного подмножества. Полученное противоречие доказывает теорему.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Проиллюстрируем предложенный подход к решению задач стохастической глобальной оптимизации на примере задачи о размещении.

Пример (задача размещения сервисных центров) [10]. Предположим, что потребители некоторой услуги распределены в области $\Omega \subset R^m$ согласно распределению $P(d\omega)$. Пусть стоимость обслуживания клиента, живущего в точке $\omega \in \Omega$, из сервисного центра, расположенного в точке $x_i \in X \subset R^m$, задается функцией $c(x_i, \omega)$, например, $c(x_i, \omega) = c(\|x_i - \omega\|)$, в частности,

$$c(x_i, \omega) = \frac{\|x_i - \omega\|^{\alpha}}{\gamma + \|x_i - \omega\|^{\beta}}, \quad \alpha \geqslant \beta > 0, \quad \gamma > 0. \tag{9}$$

Если имеется n сервисных центров в точках $x_1, \ldots, x_n \in X$, а клиент выбирает ближайший к нему центр, то стоимость его обслуживания ω задается функцией

$$f(x, \omega) = \min_{1 \le i \le n} c(x_i, \omega), \quad x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{10}$$

Задача состоит в размещении n сервисных центров так, чтобы совокупные ожидаемые затраты обслуживания всех потребителей услуги были минимальны:

$$F(x) = \int_{\Omega} \{\min_{1 \le i \le n} c(x_i, \omega)\}\, P(d\omega) \to \min_{x \in D}, \tag{11}$$

где D — множество допустимых позиций центров. Координаты центров могут удовлетворять некоторым дополнительным ограничениям, например, центры могут быть упорядочены по отношению к некоторому направлению $d \in R^m$, тогда

$$D = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X, \ldots, x_n \in X;\ dx_i \leqslant dx_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Локальный минимум в (11) может быть найден следующим итерационным алгоритмом. Обозначим начальное положение сервисных центров $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Пусть на k-й итерации положение сервисных центров задается вектором $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$. Распределим клиентов между сервисными центрами $(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ таким образом, чтобы каждый обслуживался ближайшим к нему центром, т.е. разобьем Ω на n непересекающихся подмножеств Ω_i^k, $i = 1, \ldots, n$, так, что $i = \arg\min_{1 \le i \le n} c(x_i^k, \omega)$ для всех $\omega \in \Omega_i^k$. Очередное приближение $x^{k+1} = (x_1^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ найдем как решение (приближенное) задачи выпуклого программирования

$$F^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_i^k} c\,(x_i, \omega) P(d\omega) \to \min_{x \in D}.$$

Пусть функции стоимости $c(x, \omega)$ обслуживания фиксированного клиента ω из центра в точке x допускают касательные миноранты $\phi(x, y, \omega)$. Тогда функции

$$\varphi(x, y, \omega) = \min_{1 \le i \le n} \phi(x_i, y_i, \omega) \tag{12}$$

являются касательными минорантами функции минимума $f(x, \omega) = \min_{1 \le i \le n} c(x_i, \omega)$, а функции $\Phi(x, y) = \int_{\Omega} \varphi(x, y, \omega) P(d\omega)$ — касательными минорантами $F(x)$.

Если $c(x, \omega)$ — гладкая по x функция с липшицевым градиентом, то в качестве касательных минорант $\phi(x, y, \omega)$ можно взять касательные параболоиды. Заметим также, что функция (9) представима как разность двух выпуклых функций,

$$c(x, \omega) = \frac{1}{\gamma} \|x - \omega\|^{\alpha} - \frac{\|x - \omega\|^{\alpha + \beta}}{\gamma(\gamma + \|x - \omega\|^{\beta})}.$$

Поэтому в качестве ее касательной в точке y миноранты можно взять вогнутую функцию

$$\phi(x, y, \omega) = \frac{1}{\gamma} \|y - \omega\|^{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} \|y - \omega\|^{\alpha-2} \langle (y - \omega),\ x - y \rangle - \frac{\|x - \omega\|^{\alpha+\beta}}{\gamma(\gamma + \|x - \omega\|^{\beta})}. \tag{13}$$

Для численного эксперимента возьмем в функции (9) параметры $\alpha = \beta = 2$, а $\gamma = 0,1$. Размещение потребителей $\omega_1, \ldots, \omega_m$ — равномерно распределенные случайные величины на отрезке $[0, 1]$ с вероятностями $p_{\omega_1}, \ldots, p_{\omega_m}$ соответственно. Для $m = 20$ значения ω_i и p_{ω_i} представлены в табл. 1.

Таблица 1. Распределение потребителей

Значение ω_i	Вероятность p_{ω_i}	Значение ω_i	Вероятность p_{ω_i}
0,037991	2,15658E-02	0,595109	7,57130E-02
0,100437	3,55347E-03	0,606194	8,86943E-02
0,193362	8,26707E-02	0,646899	4,32473E-02
0,260176	9,97986E-02	0,720796	1,66506E-02
0,326991	2,58563E-02	0,747336	3,97192E-02
0,442882	1,20332E-01	0,835398	2,55506E-02
0,453538	1,42203E-01	0,847773	1,52854E-02
0,480874	9,61612E-02	0,885398	8,41436E-03
0,518605	7,31521E-02	0,933185	1,32620E-03
0,518865	2,01054E-02	0,999739	7,08675E-08

В методе ветвей и границ использовалась оценка снизу значения целевой функции (11) вида [19]

$$L(Y) = \frac{1}{2} (E \max_{y \in Z} \varphi(\bar{x}, y, \omega) + E \min_{y \in Z} \varphi(\bar{x}, y, \omega)),$$

где Z — конечное множество точек (вершин) из Y; $\bar{x} \in Y$, $\varphi(x, y, \omega)$ — касательные в точках y миноранты к функции (10), вычисленные в форме (12), в которой касательные миноранты $\phi(x, y, \omega)$ к функции стоимости обслуживания клиента (9) брались в виде касательных конусов (К), параболоидов (П), а также в виде (13) (альтернатива конусу и параболоиду — (А)). Константа Липшица для функции $c(x, \omega)$ $l = 3 / 8\sqrt{3 / \gamma} \approx 2,053959$ и ее градиента $L = 2 / \gamma = 20$. В алгоритме исходное множество $[0; 1]^n$ разбивалось на симплексы, которые в процессе ветвления дробились по наибольшему ребру на два подсимплекса. Точность вычислений составляет $\varepsilon = 10^{-6}$. Завершение итерационного процесса происходит, когда достигается указанная точность или когда сделано 2 100 000 итераций. Результаты работы алгоритма представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты работы алгоритма

Размерность, n	Вид минорант	Число итераций	Число оставленных симплексов	X^*
1	К	2091	1301	(0,485959)
	П	18	5	(0,486084)
	А	19	4	(0,486084)
2	К	349550	261436	(0,227470; 0,528999)
	П	329	23	(0,227783; 0,529541)
	А	865	111	(0,228043; 0,529785)
3	П	9289	577	(0,227539; 0,469727; 0,657715)
	А	13592	1128	(0,227417; 0,469604; 0,657654)
4	П	588145	34777	(0,227539; 0,469727; 0,610352; 0,790527)
	А	668906	13106	(0,227661; 0,469604; 0,610229; 0,790649)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе метод глобальной оптимизации Пиявского, а также метод ветвей и границ модифицированы для решения задачи стохастической глобальной оптимизации с целевой функцией типа математического ожидания. В основе модификаций лежит понятие (стохастических) касательных минорант функций задачи. В частности, указан способ вычисления касательных минорант функции математического ожидания, а именно, в качестве минорант можно брать математическое ожидание касательных минорант случайных подынтегральных функций. Здесь ситуация подобна той, которая возникает при вычислении градиентов интегральных функционалов. Вычислить градиент или миноранту интегрального функционала весьма трудно, а (стохастический) градиент или (стохастическую) миноранту подынтегральной функции — сравнительно легко. Предлагается приближать исходную целевую функцию эмпирическими аппроксимациями. Знание стохастических касательных минорант дает возможность легко построить касательные миноранты для аппроксимаций, а также получать границы оптимальных значений аппроксимаций. Это, в свою очередь, позволяет применять метод Пиявского и метод ветвей и границ для глобальной минимизации исходной функции через последовательность аппроксимаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пиявский С.А. Алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967. — Вып. 2. — С. 13–24.
2. Данилин Ю.М., Пиявский С.А. Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума // Там же. — С. 25–37.
3. Пиявский С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1972. — 12, № 4. — С. 888–896.
4. Horst R., Tuy H. Global optimization (deterministic approaches). — 3rd, revised and enlarged edition. — Berlin: Springer Verlag, 1996. — 600 p.
5. Норкин В.И. О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1992. — 32, № 7. — С. 992–1007.
6. Ермольев Ю.М. Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
7. Handbooks in Operations Research and Management Science, 10: Stochastic Programming / Ed. by A. Ruszczynski and A. Shapiro. — Amsterdam: North-Holland, 2003. — 700 p.

8. Ермольев Ю.М., Норкин В.И. Методы решения задач невыпуклой негладкой стохастической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 5. — С. 89–106.

9. Norkin V., Ermoliev Yu.M., Ruszczynski A. On optimal allocation of indivisibles under uncertainty // Working paper WP-94-021 / Int. Inst. for Appl. Syst. Analysis. — Laxenburg (Austria), 1994.

10. Norkin V., Pflug G.Ch., Ruszczynski A. A branch and bound method for stochastic global optimization // Math. Progr. — 1998. — 83. — P. 425–450.

11. Norkin V., Ermoliev Yu.M., Ruszczcynski A. On optimal allocation of indivisibles under uncertainty // Oper. Res. — 1998. — 46, N 3. — P. 381–395.

12. Norkin V.I. Global optimization of probabilities by the stochastic branch and bound method // Stochastic optimization: Numerical methods and technical applications. Proc. of 3rd GAMM / IFIP Workshop (Neubiberg/Munchen, June 17-20, 1996). — Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. — Berlin: Springer, 1998. — 458. — P. 186–201.

13. Lence B.J., Ruszczcynski A. Managing water quality under uncertainty: application of a new stochastic branch and bound method // Working paper WP-96-066 / Int. Inst. for Appl. Syst. Analysis. — Laxenburg (Austria), June 1996. — 18 p.

14. Hgglf K. The implementation of the stochastic branch and bound method for applications in river basin water quality management // Working paper WP-96-89 / Int. Inst. for Appl. Syst. Analysis. — Laxenburg (Austria), 1996. — 13 p.

15. Gutjahr W.J., Hellmayr A., Pflug G.C. Optimal stochastic single-machine tardiness scheduling by stochastic branch-and-bound // Eur. J. Oper. Res. — 1999. — 117, N 2. — P. 396–413.

16. Gutjahr W.J., Strauss C., Wagner E. A stochastic branch-and-bound approach to activity crashing in project management // J. on Computing. — 2000. — 12, N 2. — P. 125–135.

17. Норкин В.И. Глобальная стохастическая оптимизация: метод вервей и вероятностных границ // Методы управления и принятия решений в условиях риска и неопределенности. — Киев: Ин-т кибернетики АН Украины, 1993. — С. 3–12.

18. Норкин В.И., Онищенко Б.О. О стохастическом аналоге метода глобальной оптимизации Пиявского // Теорія оптимальних рішень. — Київ: Ін-т кібернетики АН України, 2003. — Вип. 2. — С. 61–67.

19. Норкин В.И., Онищенко Б.О. Метод ветвей и границ с минорантными оценками для решения задач стохастической глобальной оптимизации // Компьютерная математика. — Киев: Ин-т кибернетики АН Украины, 2004. — Вып. 1. — С. 91–101.

20. Нурминский Е.А. Методы решения стохастических минимаксных задач. — Киев: Наук. думка, 1979. — 184 с.

21. Khamisov O. On optimization properties of functions, with a concave minorant // J. Global Optim. — 1999. — 14, N 1. — P. 79–101.

22. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.

23. Le Cam L. On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes' estimated // Univ. California Publ. Statist. — 1953. — 1. — P. 227–330.

Поступила 10.06.2004