УДК 532.526

Б.О. Онищенко

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ РОЗПОДІЛУ ПРОДУКЦІЇ МІЖ ВИРОБНИЧИМИ ПОТУЖНОСТЯМИ

У роботі подана загальна постановка та побудована математична модель задачі про оптимальний розподіл виготовлення продукції між виробничими потужностями та зроблено аналіз щодо рекомендацій модифікації процесу виробництва при неможливості розв’язання задачі.

Ключові слова: розподільча задача, узагальнена транспортна задача, симплекс-метод, математична модель, планування виробництва

Постановка проблеми

На сучасних підприємствах, що випускають високотехнологічну продукцію (модулі пам’яті, материнські плати, тощо), для збирання і монтування продукції в основному використовуються автоматизовані лінії. Кожна з таких ліній може бути використана для виготовлення декількох різних видів продукції. В більшості випадків досить точно відомий штатний час виготовлення одиниці продукції кожного виду на деякій автоматизованій лінії. Кожна з ліній має обмежений фонд робочого часу за певний плановий період. А підприємство, у свою чергу, планує випуск кожного виду продукції за той же період.

Для відповідних планових відділів таких підприємств актуальними є наступні проблеми:

1) визначення можливості виконання запропонованого плану випуску продукції, а у разі неможливості його виконання, формування певних рекомендації що до модифікації процесу виробництва,

2) визначення розподілу продукції по автоматизованих лініях з метою підвищення ефективності процесу виробництва, наприклад, скорочення загального часу виробництва усієї запланованої продукції.

Проблему сформульовано.

Аналіз досліджень і публікацій

Дана проблема відома у літературі, як узагальнена транспортна задача або як розподільча задача. Зокрема постановка узагальненої транспортної задачі подана у роботах [1, 2], а деякі методи її розв’язування представлені у роботах [3, 4]. Зокрема у роботі [3] описаний і проаналізований узагальнений метод потенціалів для розв’язання задач таких типів.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми та формулювання цілей

Але слід зазначити, що описана задача розв’язувалась в основному лише у контексті другої з поданих вище проблем, хоча перша проблема подекуди є більш актуальною при плануванні процесу виробництва.

У даній роботі буде побудована математична модель деякої загальної розподільчої задачі, а також будуть побудовані математичні моделі задач, що дозволять, у певній мірі, розв’язати першу із зазначених вище проблем. До кожної із отриманих моделей буде подано рекомендації щодо вибору методу отримання її розв’язку.

Виклад основного матеріалу дослідження

Представимо деяке узагальнення постановки задачі про розподіл продукції по виробничих лініях.

Нехай на підприємстві є m автоматизованих ліній, що можуть виготовляти декілька видів продукції. Нехай також відомо, що всього на підприємстві виготовляється n видів продукції. Позначимо через τ_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ затрати часу на виготовлення одиниці j-ї продукції i-ю лінією. Слід зауважити, що якщо на якихось лініях виготовлення певних видів продукції неможливе, то відповідним τ_{ij} потрібно надати значення $K>0$, повинне бути більшим, ніж максимальне значення τ_{ij} $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ з умови задачі. План випуску кожного виду продукції за певний період становить b_j, $j=\overline{1,n}$ штук, а ліміт робочого часу кожної лінії за той же період становить t_i, $i=\overline{1,m}$ годин.

Необхідно розподілити випуск продукції по лініях так, щоб загальний час випуску продукції був мінімальний. Якщо ж виконання плану неможливе, то необхідно або вказати на скільки скоротити випуск кожного з видів продукції, або ж вказати на скільки потрібно збільшити ліміт робочого часу кожної лінії.

Позначимо через x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – кількість продукції j-го типу, виготовленої на i-й лінії.

Тоді загальний час роботи підприємства за звітній період дорівнює

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j:=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij}\to\min . \tag{1}$$

Перша група обмежень показує, що продукції кожного виду повинно бути виготовлено не менше, ніж запланована кількість

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Друга група обмежень показу, що час роботи кожної лінії не повинен перевищувати загального фонду робочого часу тієї ж лінії

$$\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij}\le t_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Також необхідні обмеження невід’ємності змінних

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \tag{4}$$

Отже, математична модель задачі буде мати вигляд:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j:=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij}\to\min \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x_{ij} \leq t_i, i = \overline{1,m} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{6}$$

Отримана модель є узагальненою транспортною задачею [1] і відноситься до класу двоіндексних задач лінійного програмування. Умову представленої задачі можна подати у вигляді таблиці:

Таблиця 1

Короткий запис умови розподільчої задачі

Продукція / Лінії	P_1	P_2	…	P_n	Фонд робочого часу за звітній період
L_1	τ_{11}	τ_{12}	…	τ_{1n}	$\leq t_1$
L_2	τ_{21}	τ_{22}	…	τ_{2n}	$\leq t_2$
…	…	…	…	…	…
L_m	τ_{m1}	τ_{m2}	…	τ_{mn}	$\leq t_m$
План випуску продукції за звітній період	$\geq b_1$	$\geq b_2$	…	$\geq b_n$	

Для отримання розв’язку такої задачі можна використовувати один із спеціальних методів, запропонованих, наприклад, у [3, 4]. Одним із таких методів є узагальнений метод потенціалів. Але ці методи погано працюють у випадку, коли задача не має розв’язку, тобто за їх допомогою визначення умов неіснування розв’язку є досить проблематичним. Тому для отримання розв’язку поставленої задачі можна скористатися одним із варіантів симплекс-методу з використанням або двоїстого симплекс-методу, або методу штучного базису. Як відомо, у симплекс-методі існують чіткі критерії неіснування розв’язку задачі лінійного програмування. Але слід зазначити, що симплекс-метод реалізований для одноіндексних задач лінійного програмування.

Отже, першим етапом розв’язання отриманої математичної задачі буде перехід від її двоіндексного представлення до одноіндексного. Суть переходу полягає у розгортанні матриці двоіндексних змінних у вектор, а також формуванні матриці коефіцієнтів системи обмежень загальної задачі лінійного програмування.

При переході від двоіндексного представлення задачі до задачі лінійного програмування умова може бути представлена у вигляді поданому у таблиці 2.

При переході до канонічної форми задачі лінійного програмування можна йти двома шляхами: для подальшого застосування двоїстого симплекс-методу (див. таблицю 3), для подальшого застосування симплекс-методу у сукупності з методом штучного базису (див. таблицю 4).

Таблиця 2

Подання двоіндексної задачі у одноіндексному вигляді

	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}		x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	
1	1				1					1				$\geq b_1$
2		1				1					1			$\geq b_2$
…			$\ddots$				$\ddots$		…			$\ddots$		…
n				1				1					1	$\geq b_n$
1	τ_{11}	τ_{12}	…	τ_{1n}										$\leq t_1$
2					τ_{21}	τ_{22}	…	τ_{2n}						$\leq t_2$
…									…					…
m										τ_{m1}	τ_{m2}	…	τ_{mn}	$\leq t_m$
	τ_{11}	τ_{12}	…	τ_{1n}	τ_{21}	τ_{22}	…	τ_{2n}	…	τ_{m1}	τ_{m2}	…	τ_{mn}	min

Таблиця 3

Представлення задачі в канонічній формі для двоїстого симплекс-методу

	x_{11}	…	x_{1n}		x_{m1}	…	x_{mn}	x_{m+11}	…	x_{m+1n}	x_{1n+1}	…	x_{mn+1}	
1	-1				-1			1						$-b_1$
…		$\ddots$		…		$\ddots$			$\ddots$					…
n			-1				-1			1				$-b_n$
1	τ_{11}	…	τ_{1n}								1			t_1
…				…								$\ddots$		…
m					τ_{m1}	…	τ_{mn}						1	t_m
	τ_{11}	…	τ_{1n}	…	τ_{m1}	…	τ_{mn}	0	…	0	0	…	0	min

Таблиця 4

Представлення задачі в канонічній формі для симплекс-методу з методом штучного базису

	x_{11}	…	x_{1n}		x_{m1}	…	x_{mn}	x_{m+11}	…	x_{m+1n}	x_{m+21}	…	x_{m+2n}	x_{1n+1}	…	x_{mn+1}	
1	1				1			-1			1						b_1
…		$\ddots$		…		$\ddots$			$\ddots$			$\ddots$					…
n			1				1			-1			1				b_n
1	τ_{11}	…	τ_{1n}											1			t_1
…				…											$\ddots$		…
m					τ_{m1}	…	τ_{mn}									1	t_m
	τ_{11}	…	τ_{1n}	…	τ_{m1}	…	τ_{mn}	0	…	0	M	…	M	0	…	0	min

У результаті розв’язання отриманих задач буде або визначений оптимальний план завантаження ліній виготовленням різних видів продукції для виконання встановленого плану випуску продукції за мінімально можливий час, або встановлено, що виконання плану неможливе.

У разі неможливості виконання плану випуску продукції спробуємо спочатку побудувати модель, що дасть змогу визначити величину збільшення лімітів робочого часу для кожної з ліній. А потім побудуємо модель для визначення величин, на які потрібно зменшити план випуску кожного виду продукції.

1. Позначимо додатковий ліміт робочого часу по кожній лінії змінною y_i, $i=\overline{1,m}$. Причому, якщо збільшення лімітів робочого часу для певних ліній є фізично чи економічно неможливим або не вигідним, то відповідні змінні y_i відразу потрібно прирівняти до нуля. Додамо дані змінні до математичної моделі задачі. Тоді обмеження (3) набудуть наступного вигляду

$$\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij} \le t_i + y_i,\ i=\overline{1,m}. \tag{7}$$

А після перенесення змінних y_i, $i=\overline{1,m}$ у ліві частини нерівностей отримаємо наступну математичну модель:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j:=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij} \to \min \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, j=\overline{1,n}; \\ \sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij} - y_i \le t_i, i=\overline{1,m}; \\ x_{ij} \ge 0, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}; \\ y_i \ge 0, i=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{9}$$

Отриману математичну модель теж можна розв'язувати симплекс-методом і змінні y_i, $i=\overline{1,m}$ будуть вказувати час, на який треба збільшити ліміт робочого часу відповідних ліній. Тобто новий час роботи i-ї лінії буде дорівнювати $t_i + y_i$, $i=\overline{1,m}$. А у змінних x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ буде план завантаження ліній при такому збільшенні їх фонду робочого часу.

У таблиці 5 показаний вигляд умови задачі (8)-(9), приведений до канонічної форми для розв'язання двоїстим симплекс-методом.

Для розв'язання задачі методом штучного базису її умову перетворюють до канонічного вигляду аналогічно до таблиці 4.

2. Для визначення скорочень обсягів плану виробництва продукції необхідно кожне значення плану b_j, $j=\overline{1,n}$ зменшити на величину z_j, $j=\overline{1,n}$. Тоді обмеження (2) будуть мати вигляд

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j - z_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Але цільова функція повинна показувати загальний обсяг випуску продукції, який повинен бути максимальним. І математична модель такої задачі буде мати вигляд

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j:=1}^{n}x_{ij}\to \max \tag{11}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}+z_j=b_j,\ j=\overline{1,n};\\ \sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}x_{ij}\le t_i,\ i=\overline{1,m};\\ x_{ij}\ge 0, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n};\\ z_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{12}$$

Таблиця 5.

Представлення задачі з додатковими лімітами робочого часу в канонічній формі для двоїстого симплекс-методу

	x_{11}	…	x_{1n}		x_{m1}	…	x_{mn}	y_1	…	y_m	x_{m+11}	…	x_{m+1n}	x_{1n+1}	…	x_{mn+1}	
1	-1				-1						1						$-b_1$
…		⋱		…		⋱						⋱					…
n			-1				-1						1				$-b_n$
1	τ_{11}	…	τ_{1n}					-1						1			t_1
…				…					⋱						⋱		…
m					τ_{m1}	…	τ_{mn}			-1						1	t_m
	τ_{11}	…	τ_{1n}	…	τ_{m1}	…	τ_{mn}	0	…	0	0	…	0	0	…	0	min

Таблиця 6.

Представлення задачі зі скороченням обсягів плану в канонічній формі

	x_{11}	…	x_{1n}		x_{m1}	…	x_{mn}	z_1	…	z_n	x_{1n+1}	…	x_{mn+1}	
1	1				1			1						b_1
…		⋱		…		⋱			⋱					…
n			1				1			1				b_n
1	τ_{11}	…	τ_{1n}								1			t_1
…				…								⋱		…
m					τ_{m1}	…	τ_{mn}						1	t_m
	1	…	1	…	1	…	1	0	…	0	0	…	0	min

Цю модель також можна розв’язувати одним із варіантів симплекс-методу. Значення змінних z_j, $j=\overline{1,n}$ будуть містити обсяги скорочення плану випуску кожного виду продукції. Тобто новий план випуску j-ї продукції буде дорівнювати b_j-z_j, $j=\overline{1,n}$. А у змінних x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ буде план завантаження ліній при зменшенні обсягів плану випуску продукції. Якщо ж план випуску якогось із видів продукції зменшувати не можна, то відповідну z_j просто не треба вводити до системи обмежень.

У таблиці 6 показаний вигляд умови задачі (11)-(12), приведений до канонічної форми для розв'язання симплекс-методом.

Висновки

У даній роботі побудовані математичні моделі, що дозволяють проаналізувати та, при необхідності, зробити корекцію планування процесу виробництва при наявності виробничих ліній, що можуть виготовляти декілька видів продукції. Причому відносно просто можна визначити неможливість виконання запропонованого плану, а також отримати рекомендації щодо модифікації процесу виробництва з використанням двох різних шляхів: збільшення лімітів робочого часу ліній, зменшення обсягів плану випуску продукції. В подальшому можливо також побудувати деякі комбіновані математичні моделі, що будуть об'єднувати обидва шляхи модифікації процесу виробництва.

Література

1. Ашманов С.А. Линейное программирование.– М.: Наука, 1981. – 304 с.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций [Пер. с англ.] – М.: Мир, 1972. – 1. – 335 с.
3. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования / Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. – М.: Наука, 1964. – 382 с.
4. Раскин Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования. / Раскин Л.Г., Кириченко И.О. –М.: Радио и связь, 1982. – 240 с.

Прийнято до друку 05.10.2009

Аннотация

Б.О. Онищенко Анализ математических моделей задач распределения продукции между производственными мощностями

В работе представлена общая постановка и построена математическая модель задачи об оптимальном распределении изготовления продукции между производственными мощностями и сделан анализ относительно рекомендаций модификации процесса производства при невозможности решения задачи.

Ключевые слова: распределительная задача, обобщенная транспортная задача, симплекс-метод, математическая модель, планирование производства.

Summary

B.O. Onishchenko. Analysis of mathematical models of products distribution between production facilities

The paper provides a general statement and a mathematical model of the problem of optimal distribution of manufacturing production between production facilities and recommendations regarding the analysis of modification of the production process at the impossibility of solving the problem are made.

Keywords: Distribution problem, the generalized transportation problem, the simplex-method, mathematical model, production planning.