КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.853.4

В.И. НОРКИН, Б.О. ОНИЩЕНКО

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ С МИНОРАНТНЫМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В работе обоснован метод ветвей и границ для решения задачи стохастической глобальной оптимизации с целевой функцией типа математического ожидания или вероятности. Исследованы границы оптимальных значений таких функций, построенные с помощью касательных минорант. В качестве минорант используются математические ожидания стохастических касательных минорант подынтегральной функции. Проведено численное сравнение различных вариантов метода.

© В.И. Норкин, Б.О. Онищенко, 2004

Введение. Метод ветвей и границ является одним из основных методов дискретной и глобальной оптимизации [1]. Он характеризуется способом разбиения исходного допустимого множества (например, на параллепипеды, симплексы и т.п.), видом оценок оптимального значения целевой функции на подмножестве (например, релаксация ограничений, двойственные оценки и др.), стратегией размельчения разбиения. Основное отличие различных вариантов метода состоит в способе получения оценок снизу оптимального значения на фрагменте разбиения. В настоящей работе мы применяем минорантные оценки оптимальных значений, основанные на понятии касательных минорант функции. Мы развиваем этот подход для задач стохастической глобальной оптимизации с целевыми функциями в виде функции математического ожидания или вероятности. Для общих липшицевых функций касательные миноранты имеют вид касательных конусов [2]. Однако существует много других видов касательных минорант, например, касательные параболоиды и др. [3, 4]. Для функций вероятности в настоящей работе используются разрывные касательные миноранты.

Стохастические касательные миноранты. Рассмотрим задачу стохастической глобальной оптимизации:

$$\min_{x\in X}\,[F(x)=Ef(x,\theta)]\,, \qquad (1)$$

или

$$\min_{x\in X}\,[P(x)=P\{f(x,\theta)\geq 0\}]\,, \qquad (2)$$

где θ – случайный параметр; $f(x,\theta)$ – некоторая непрерывная по x и интегрируемая по θ функция; $\theta \in \Theta$; E – символ математического ожидания по θ; $P\{\cdot\}$ – символ вероятности; X – непрерывное или дискретное множество.

Будем предполагать, что функции $f(\cdot,\theta)$ при каждом θ допускают касательные в точках y миноранты $\varphi(x,y,\theta)$ и, таким образом, неявно предполагаем, что функции $f(\cdot,\theta)$ являются функциями максимума: $f(x,\theta) = \max_{y\in X} \varphi(x,y,\theta)$. Фактически, будем рассматривать задачи глобальной оптимизации вида:

$\min_{x\in X} [F(x) = E \max_{y\in Z} \varphi(x,y,\theta)]$, $\min_{x\in X} \left[P(x) = P\left\{\max_{y\in Z} \varphi(x,y,\theta) \geq 0\right\}\right]$,

где Z – некоторое конечное или бесконечное множество, $\varphi(x,y,\theta)$ – вогнутые по x функции. Это стохастические минимаксные задачи.

Определение 1. Пусть X – топологическое пространство, функции $F(x), x\in X$, и $\varphi(x,y), x\in X, y\in X$, связаны условиями:

(i) $F(x) \geq \varphi(x,y)$ для всех $x\in X$, $y\in X$;

(ii) $F(y) = \varphi(y,y)$ для всех $y\in X$;

(iii) функция $\varphi(x,y)$ полунепрерывна снизу по (x,y).

Тогда функции $\{\varphi(\cdot,y), y\in X\}$ называются *касательными* (в точках y) *минорантами* для $F(x)$.

Замечание. Аналогично определяются касательные мажоранты. Пиявский в [4] рассматривал непрерывные по (x,y) миноранты, Норкин в [4] изучал непрерывные по x равностепенно по y миноранты, а Хамисов в [5] рассматривает вогнутые, возможно, разрывные по x миноранты. Мы допускаем, например, квазивогнутые разрывные по x миноранты.

Определение 2. Функции $\{\varphi(\cdot,y,\theta), y\in X, \theta\in\Theta\}$, где Θ – носитель некоторого вероятностного пространства (Θ,Σ,P), называются *стохастическими касательными минорантами* для $F(x)$, если функции $\varphi(x,y,\theta)$ измеримы по θ, а математические ожидания $\varphi(x,y) = E\varphi(x,y,\theta)$ конечны и для каждого $y\in X$ являются касательными в точке y минорантами для $F(x)$.

Лемма 1. Предположим, что функции $f(\cdot,\theta)$ допускает касательные миноранты $\varphi(x,y,\theta)$ в точках $y\in X$, т.е. почти для всех θ выполнено

1) $f(x,\theta) \geq \varphi(x,y,\theta)$ для всех $x\in X$, $y\in X$;

2) $f(y,\theta) = \varphi(y,y,\theta)$ для всех $y\in X$;

3) функция $\varphi(x,y,\theta)$ полунепрерывна снизу по (x,y) почти для всех θ;

4) $\varphi(x,y,\theta)$ – измерима по θ для любых $x, y\in X$;

5) $|\varphi(x,y,\theta)| \leq M(\theta)$ для всех $x, y\in X$ с интегрируемой функцией $M(\theta)$.

Тогда функции $\varphi(x,y)=E\varphi(x,y,\theta)$ являются касательными минорантами для функции математического ожидания $F(x)=Ef(x,\theta)$.

Доказательство. Условия (i), (ii) определения 1 следуют из 1), 2). Условие (iii) следует из 3) – 5) и леммы Фату.

Замечание 1. Лемма 1 дает способ построения (стохастических) касательных минорант для функций типа математического ожидания. Касательные миноранты функции вероятности $P(x)=P\{f(x,\theta)\geq 0\}$ строятся аналогично, а именно, в качестве касательной в точке y миноранты $P(x)$ можно взять функцию $\phi(x,y)=P\{\varphi(x,y,\theta)\geq 0\}$, где $\varphi(x,y,\theta)$ – касательная в точке y миноранта функции $f(x,\theta)$.

Касательные миноранты тесно связаны с функциями максимума.

Лемма 2. Пусть X и Y – некоторые множества, функция $\varphi(x,y)$ полунепрерывна снизу по $(x,y)\in X\times Y$. Тогда функция

$$F(x)=\sup_{y\in Y}\varphi(x,y) \tag{3}$$

полунепрерывна снизу по x в тех точках x, в которых она конечна.

Отсюда следует, что если супремум в (3) достигается, то функции $\varphi(x,y)$ являются касательными минорантами для $F(x)$.

Следующая лемма дает обратное утверждение.

Лемма *3* [6]. Конечная функция $F:X\to R^1$ является полунепрерывной снизу на компакте X только тогда, когда она может быть представлена в виде супремума непустого множества непрерывных вогнутых функций $\varphi(x,y)$, $y\in Y$: $F(x)=\sup_{y\in Y}\varphi(x,y)$.

Следствие. Если $\{\varphi(\cdot,y)\}_{y\in X}$ – семейство касательных минорант функции $F(\cdot)$, то $F(\cdot)$ полунепрерывна снизу и представима в виде функции максимума:

$$F(x)=\sup\{\varphi(x,y)\,|\,y\in X\}.$$

Если функции $f(x,\theta)$ липшицевы (гельдеровы) с интегрируемой по θ константой Липшица $L(\theta)$ и показателем α, то в качестве касательной в точке y миноранты для $f(x,\theta)$ можно взять функцию $\varphi(x,y,\theta)=f(y,\theta)-L(\theta)\|x-y\|^{\alpha}$.

Для гладких по x функций $f(x,\theta)$ с липшицевым градиентом (с константой $L(\theta)$) в качестве стохастических касательных минорант можно использовать касательные к графику $f(\cdot,\theta)$ в точках y параболоиды:

$$\varphi(x,y,\theta)=f(y,\theta)+\frac{1}{2L(\theta)}\|\nabla f(y,\theta)\|^2-\frac{L(\theta)}{2}\left\|x-y-\frac{1}{L(\theta)}\nabla f(y,\theta)\right\|^2.$$

Минорантные границы оптимальных значений. Обозначим $F_*=\min_{x\in X}F(x)$. Пусть $\{\varphi(x,y)\}_{y\in Z}$ – семейство касательных в точках $y\in Z$

минорант для $F(x)$, Z – конечное или бесконечное множество точек из X. Рассмотрим ряд оценок оптимального значения F_*, построенных на основе информации, заложенной в семействе касательных минорант $\{\varphi(x,y)\}_{y\in Z}$.

1. Очевидно, что функция $\phi(x)=\max_{y\in Z}\varphi(x,y)$ – миноранта для $F(x)$, касательной во всех точках $y\in Z$, и величина $F_1=\min_{x\in X}\phi(x)$ – оценка снизу для F_*.

2. Рассмотрим величину $F_2=\max_{x\in X}\min_{y\in Z}\varphi(x.y)$.

Лемма 4. Предположим, что выпуклая оболочка coZ конечного множества точек $Z\subset X$ совпадает с X, а миноранты имеют вид $\varphi(x,y)=\phi(y,\|x-y\|)$, $y\in Z$, причем $\phi(y,\cdot)$ монотонно убывает и непрерывна по второму аргументу. Тогда $F_2\le F_*$.

Доказательство. Очевидно, функция $\min_{y\in Z}\varphi(x,y)$ непрерывна по x и, таким образом, достигает максимума на X в некоторой точке x^*. Нетрудно видеть, что абсолютный максимум ψ^* функции $\psi_{\min}(x)=\min_{y\in Z}\varphi(x,y)$ достигается на множестве coZ и абсолютный минимум ψ_* функции $\psi_{\max}(x)=\max_{y\in Z}\varphi(x,y)$ на coZ удовлетворяет соотношению $\psi^*\le\psi_*$. Действительно, пусть $x'\notin coZ$. Обозначим $\bar{x}$ – проекцию точки $x'\notin coZ$ на coZ, и рассмотрим точки $x(t)=(1-t)x'+t\bar{x}$, $t\in[0,1]$, отрезка, соединяющего x' и $\bar{x}$. Вдоль этого отрезка функция $\varphi(x(t),y)=\phi(y,\|x(t)-y\|)$ при фиксированном $y\in Z$ монотонно возрастает, следовательно, абсолютный максимум ψ^* функции $\psi_{\min}(x)$ достигается на множестве coZ. Пусть $x_m^*\in\arg\max_{x\in coZ}\psi_{\min}(x)$. При любом смещении от x_m^* в точку $x\in coZ$ в силу геометрии евклидова пространства найдется точка $y(x)\in Z$ такая, что $\|x-y(x)\|\le\left\|x_m^*-y(x)\right\|$. Следовательно, $\psi_{\min}(x_m^*)\le\phi(y(x),\left\|x_m^*-y(x)\right\|)\le\phi(y(x),\|x-y(x)\|)\le\psi_{\max}(x)$. Таким образом, $F_2=\max_x\psi_{\min}(x)=\max_{x\in coZ}\psi_{\min}(x)\le\min_{\bar{x}\in coZ}\psi_{\max}(\bar{x})=F_1\le F_*$.

3. Величина $F_3=\min_{y\in Z}\varphi(\bar{x},y)\le F_2$ при любом $\bar{x}\in X$ в условиях леммы 4 является оценкой снизу для F_*. Оценка F_3 тем лучше, чем ближе $\bar{x}$ к оптимальной точке x^*.

4. Очевидно, что $F_4=\max_{y\in Z}\min_{x\in X}\varphi(x,y)\le F_*$.

Если X является многогранником (например, параллелепипедом или симплексом), а $\varphi(x, y)$ вогнута или квазивогнута по x, то $\min_{x\in X} \varphi(x, y)$ достигается в вершинах многогранника X. Если при этом множество Z является конечным, то вычисление F_* не представляет труда. Введем также величины

$$F_5 = \max_{y\in Z} \varphi(\bar{x}, y), \; F_6 = \left(\max_{y\in Z} \varphi(\bar{x}, y) + \min_{y\in Z} \varphi(\bar{x}, y)\right)/2,$$

где $\bar{x}$ – некоторая средняя точка из множества X, например, центр тяжести X.

Минорантные границы оптимальных значений функции математического ожидания $F(x) = Ef(x,\theta)$. Если вероятностная мера дискретна, то взятие математического ожидания сводится к суммированию: $F(x) = \sum_{\theta\in\Theta} p_\theta f(x,\theta)$, где p_θ – значения вероятности элементарного события θ.

В случае общей вероятностной меры можно аппроксимировать задачу (1) эмпирическими средними:

$$\min_{x\in X} [F_N(x) = 1/N \sum_{k=1}^{N} f(x,\theta^k)], \quad (4)$$

где θ^k – независимые наблюдения случайного параметра θ. Если функции $F_N(x)$ равномерно сходятся к $F(x) = Ef(x,\theta)$, то вместо исходной задачи (1) можно решать приближенную задачу (4). Очевидно, функции $\varphi_N(x, y) = 1/N \sum_{k=1}^{N} \varphi(x, y, \theta^k)$ – касательные миноранты для $F_N(x)$.

Замечание 2. Если $|f(x,\theta)| \le M(\theta)$ для любого $x\in X$ с интегрируемой функцией $M(\theta)$, то семейство функций $\{f(x,\cdot), x\in X\}$ равномерно интегрируемо и с вероятностью 1 функции $F_N(x)$ равномерно сходятся к $F(x)$.

В общем случае, $\varphi(x, y) = E\varphi(x, y, \theta)$ является касательной в y минорантой $F(x) = Ef(x,\theta)$. С ее помощью можно построить аналоги границ $F_1, ..., F_5$, например: $\Phi_1 = \min_{x\in X} \max_{y\in X} E\varphi(x, y, \theta)$; $\Phi_2 = \max_{x\in X} \min_{y\in X} E\varphi(x, y, \theta)$; $\Phi_3 = \min_{y\in X} E\varphi(\bar{x}, y, \theta) \le \Phi_2$, $\bar{x}\in X$; $\Phi_4 = \max_{y\in X} \min_{x\in X} E\varphi(x, y, \theta)$.

Если $\varphi(x, y, \theta) = \phi(y, \theta, \|x - y\|)$ с монотонно убывающей по последнему аргументу функцией ϕ, например, $\varphi(x, y, \theta) = f(y, \theta) - L(\theta)\|x - y\|$, то функция $\varphi(x, y) = E\varphi(x, y, \theta)$ удовлетворяет условиям леммы 4 и тогда $\Phi_2 \le \Phi_1$.

Границы $\Phi_1, ..., \Phi_4$ имеет смысл применять, если миноранты $\varphi(x, y, \theta)$ вогнуты по x, в этом случае математические ожидания $E\varphi(x, y, \theta)$ остаются вогнутыми по x. Тогда получение оценки Φ_2 сводится к максимизации вогнутой функции $E\varphi(x, y, \theta)$ на множестве X, а вычисление Φ_4 сводится к перебору значений вогнутых функций $E\varphi(x, y, \theta)$, в вершинах многогранника X.

Следующие границы являются специфическими для функции математического ожидания: $\Phi_7 = \min_{x\in X} E\max_{y\in X} \varphi(x,y,\theta) \ge \Phi_1$,

$\Phi_8 = E\min_{x\in X} \max_{y\in X} \varphi(x,y,\theta) \le \Phi_7$, $\Phi_9 = E\max_{y\in X} \min_{x\in X} \varphi(x,y,\theta)$.

Для специальных минорант вида $\varphi(x,y,\theta) = \phi(y,\theta,\|x-y\|)$, удовлетворяющих при каждом θ условиям леммы 4, имеет место $\min_{x\in X} \max_{y\in X} \varphi(x,y,\theta) \ge \max_{x\in X} \min_{y\in X} \varphi(x,y,\theta)$, и поэтому справедлива оценка $\Phi_{10} = E\max_{x\in X} \min_{y\in X} \varphi(x,y,\theta) \le \Phi_8$. Оценки Φ_9, Φ_{10} имеет смысл применять, если миноранты $\varphi(x,y,\theta)$ не являются вогнутыми, а только квазивогнуты по x. Рассмотрим также: $\Phi_{11} = E\min_{y\in X} \varphi(\overline{x},y,\theta) \le \Phi_{10}$, $\Phi_{12} = \max_{y\in X} E\varphi(\overline{x},y,\theta)$, $\Phi_{13} = \min_{x\in X} E\varphi(x,\overline{y},\theta)$, где $\overline{y}\in X$.

Минорантные границы оптимальных значений функции вероятности $P(x) = P\{f(x,\theta)\le 0\}$. Будем рассматривать задачу глобальной максимизации $P(x)$ на выпуклом множестве X. Если $\varphi(x,y,\theta)$ касательная в точке y миноранта функции $f(x,\theta)$, то функция $\varphi(x,y) = P\{\varphi(x,y,\theta)\le 0\}$ является касательной (в y) мажорантой для $P(x)$, т.е. $P(x) \le \varphi(x,y)$ и $P(y) = \varphi(y,y)$. В качестве стохастических касательных мажорант можно взять индикаторные функции: $\phi(x,y,\theta) = 1$, если $\varphi(x,y,\theta)\le 0$, и $\phi(x,y,\theta) = 0$ в противном случае. Очевидно, $\varphi(x,y) = E\phi(x,y,\theta)$. Если $\varphi(x,y,\theta)$ является квазивогнутой по первому аргументу, то и $\phi(x,y,\theta)$ квазивыпукла по x. Аналогично математическим ожиданиям можно построить оценки сверху оптимальных значений функции вероятности $P(x)$ на множестве X, включающем конечное подмножество точек (касания) Z, например, $P_1 = E\min_{y\in Z} \max_{x\in X} \phi(x,y,\theta)$.

Нахождение максимума квазивыпуклой функции $\phi(x,y,\theta)$ на многограннике X сводится к перебору значений этой функции в вершинах многогранника.

Метод ветвей и границ. Рассматривается задача глобальной минимизации непрерывной функции $F(x)$ на множестве $X \subset R^n$. Пусть есть последовательность функций $F_N(x)$, равномерно сходящаяся к $F(x)$ при $N\to\infty$, например, для задачи стохастической глобальной оптимизации $F_N(x) = 1/N \sum_{k=1}^{N} f(x,\theta^k)$ в условиях замечания 2 с вероятностью 1 равномерно сходятся к $F(x) = Ef(x,\theta)$. На каждой итерации N имеется текущее разбиение Σ_N исходного множества X. Для каждого элемента $Y\in\Sigma_N$ имеются текущие верхняя $U_N(Y)$ и нижняя $L_N(Y)$ оценки оптимального значения $F_N^* = \min_{y\in Y} F_N(y)$, т.е. $L_N(Y) \le F_N^* \le U_N(Y)$. Обозначим Y_N – рекордное множество разбиения

Σ_N, т.е. $L_N(Y_N)=\min_{Y\in\Sigma_N} L(Y)$. Пусть множество Y_N выбирается для ветвления, т.е. оно представляется в виде объединения нескольких подмножеств $Y_{Nk}\subset Y_N$, $k=1,2,\ldots$, так, что $Y_N=\bigcup_k Y_{Nk}$. Таким образом новое разбиение имеет вид $\Sigma_{N+1}=(\Sigma_N \setminus Y_N)\bigcup\left(\bigcup_k Y_{Nk}\right)$. Для элементов $Y\in\Sigma_{N+1}$ нового разбиения Σ_{N+1} перевычисляются оценки $L_{N+1}(Y)$ и $U_{N+1}(Y)$ оптимального значения $F^*_{N+1}=\min_{y\in Y} F_{N+1}(y)$ функции $F_{N+1}(y)$ на элементе Y. Если $N+1\geq M$, то из разбиения Σ_{N+1} удаляются бесперспективные множества Y' такие, что $L_{N+1}(Y')>\min_{Y\in\Sigma_{N+1}} U_{N+1}(Y)+\varepsilon$, и т.д. Это стандартный метод ветвей и границ, за исключением того, что на каждой его итерации используются оценки подмножеств не на основе исходной функции $F(x)$, а на основе приближенных функций $F_N(x)$.

Обозначим $\varepsilon_M=\sup_{N\geq M}\sup_{x\in X}\left|F(x)-F_N(x)\right|$. Очевидно, в силу равномерной сходимости $F_N(x)$ к $F(x)$ на X имеет место $\lim_{M\to\infty}\varepsilon_M=0$.

Теорема 1 (о сходимости). Пусть $F(x)$ – непрерывная функция, последовательность $\{F_N(x), N=1,2,\ldots\}$ равномерно сходится к $F(x)$ на X, $\varepsilon_M\leq\varepsilon/2$. Предположим, что разбиения осуществляются так, что диаметры рекордных множеств стремятся к нулю, $diam(Y_N)\to 0$, и $U_N(Y_N)-L(Y_N)\to 0$ при $N\to\infty$. Тогда последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна и для любой предельной точки y рекордных множеств Y_N выполнено: $F(y)-\min_{x\in X}F(x)\leq 2\varepsilon_M$.

Доказательство. Последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна, так как подмножества $Y\in\Sigma_N$ с минимальным значением верхней границы $U(Y)$ не удаляются. Более того, не удаляются также подмножества, содержащие глобальные минимумы $F(x)$ на X. Так как для точек $\overline{x}$ удаляемых подмножеств $Y\in\Sigma_N$ выполнено $F_N(\overline{x})\geq L_N(Y)>\min_{Y\in\Sigma_N} U_N(Y)+\varepsilon\geq\min_{y\in X}F_N(y)+\varepsilon$, /

то $F(\overline{x})+\varepsilon_M\geq F_N(\overline{x})\geq\min_{x\in X}\left(F(x)-\varepsilon_M\right)+\varepsilon\geq\min_{x\in X}F(x)-\varepsilon_M+\varepsilon$,

или $F(\overline{x})\geq\min_{y\in X}F(x)-2\varepsilon_M+\varepsilon$. Таким образом, если $\varepsilon_M\leq\varepsilon/2$, то точки $\overline{x}$ такие, что $F(\overline{x})<\min_{x\in X}F(x)-2\varepsilon_M+\varepsilon$, никогда не удаляются, в частности, никогда не удаляется глобальный минимум x^* функции $F(x)$ на X. Пусть множество Y^*_N содержит глобальный минимум x^*, тогда

$$L_N(Y^*_N)\leq\min_{x\in Y^*_N}F_N(x)\leq\min_{x\in Y^*_N}F(x)+\varepsilon_M=F(x^*)+\varepsilon_M.$$

Предположим, что $\lim_{k\to\infty}Y_{N_k}=y$. Покажем, что y является $(2\varepsilon_M)$ – оптимальной точкой задачи. Предположим противное, что

$F(y)-\min_{x\in X} F(x)>2\varepsilon_M$. Так как $L_N(Y_N)\le\min_{x\in Y_N} F_N(x)\le U_N(Y_N)$ и $U_N(Y_N)-L(Y_N)\to 0$, то в силу равномерной сходимости $F_N\Rightarrow F$ выполнено $\lim_{k\to\infty} L_{N_k}(Y_{N_k})=F(y)$ и, таким образом, для достаточно больших k имеет место $L_{N_k}(Y_{N_k})\ge F(y)-\varepsilon_M/2\ge\min_{x\in X} F(x)+(3/2)\varepsilon_M$. Таким образом для достаточно больших k $L_{N_k}(Y_{N_k})\ge\min_{x\in X} F(x)+(3/2)\varepsilon_M\ge L_{N_k}(Y^*_{N_k})+\varepsilon_M/2$, что противоречит определению Y_{N_k} как рекордного подмножества. Полученное противоречие доказывает теорему.

Численные эксперименты. Для эксперимента использовались функции: $f_1(x)=10n+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-10\cos(2\pi x_i))$, $x\in[-5;5]^n$, с оценками констант Липшица для функции $l_1=72\sqrt{n}$ и ее градиента $L_1=397\sqrt{n}$, где n – размерность пространства, с глобальным минимумом в точке $x^*=0$ и минимальным значением $f_1(x^*)=0$; $f_2(x)=418.98n+\sum_{i=1}^{n}(-x_i\sin(\sqrt{|x_i|}))$, $x\in[5;500]$, $l_2=12\sqrt{n}$, $L_2=0.41\sqrt{n}$, $x^*=420.9687$, $f_2(x^*)=0$.

Рассмотрим работу метода ветвей и границ при различных способах разбиения пространства и различных методах оценки снизу целевой функции.

Используются следующие *способы разбиения пространства*:

1) симплексами, причем при ветвлении каждое ребро симплекса делится пополам и в построении новых симплексов принимает участие также и центр тяжести исходного симплекса;

2) симплексами, причем при разбиении выбранного симплекса пополам делится наибольшее ребро, и он разбивается на два подсимплекса;

3) параллелепипедами, причем в исходном параллелепипеде пополам делится наибольшее ребро, и он разбивается на два параллелепипеда.

Рассматриваются следующие методы оценки снизу $F_*=\min_{x\in X} F(x)$:

a) $\frac{1}{2}[\min_{y\in Z}\{\varphi(x,y)\}+\max_{y\in Z}\{\varphi(x,y)\}]$; b) $\min_{y\in Z}\{\varphi(\bar{x},y)\}$; c) $\max_{y\in Z}\{\varphi_i(\bar{x},y)\}$;

d) $\frac{1}{2}[\min_{y\in Z}\{\varphi(\bar{x},y)\}+\max_{y\in Z}\{\varphi(\bar{x},y)\}]$; e) $\min_{x\in Z}\{\varphi(x,\bar{y})\}$; f) $\max_{y\in Z}[\min_{x\in Z}\{\varphi(x,y)\}]$,

где Z – множество вершин элемента разбиения, а $\bar{x}$, $\bar{y}$ – среднее арифметическое вершин элемента разбиения. Результаты вышеописанных расчетов для одно- и двумерного пространств приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

ТАБЛИЦА 1. Сравнительная характеристика работы алгоритма при $n=1$

$f(x)$	Разбиение	Вид минорант	Характеристики алгоритма	Вид оценки снизу					
				a)	b)	c)	d)	e)	f)
I	1), 2), 3)	Параболоид	Итерации	53	47	25	39	59	67
			Оставленные симплексы	3	3	3	3	3	2
		Конус	Итерации	161	197	93	161	163	293
			Оставленные симплексы	75	71	58	75	75	141
II	1), 2), 3)	Параболоид	Итерации	30	22	20	22	30	34
			Оставленные симплексы	5	3	3	3	5	5
		Конус	Итерации	1114	1130	1095	1114	1116	2212
			Оставленные симплексы	690	693	689	690	690	1380

ТАБЛИЦА 2. Сравнительная характеристика работы алгоритма при $n=2$

$f(x)$	Разбиение	Характеристики алгоритма	Вид оценки снизу					
			a)	b)	c)	d)	e)	f)
I	1)	Итерации	1429	2271	269	1185	2661	3707
		Оставленные симплексы	37	22	17	14	69	67
	2)	Итерации	1853	2555	517	1595	2847	4531
		Оставленные симплексы	29	27	8	21	49	55
	3)	Итерации	1110	1245	618	977	1612	3184
		Оставленные симплексы	12	18	7	10	21	41
II	1)	Итерации	441	523	97	281	661	913
		Оставленные симплексы	41	44	11	30	59	75
	2)	Итерации	617	625	231	445	793	1275
		Оставленные симплексы	31	33	11	23	39	49
	3)	Итерации	365	306	270	291	470	871
		Оставленные симплексы	21	24	24	24	37	39

Рассмотрим пример задачи стохастической глобальной минимизации функции $F(x)=Ef(x,\theta)$, где $f(x,\theta)=(x-1-\theta)(x-3-\theta)(x-7-\theta)(x-11-\theta)$, θ – равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$ случайная величина, $x\in[1,11]$. Нетрудно вычислить, что $F(x)=x^4-24x^3+187x^2-537x+14051/30$, $x^*=9.977$; $F(x^*)=-201.667$. Возьмем детерминированные оценки констант Липшица $l=537$; $L=374$ функции $f(x,\theta)$ и ее градиента соответственно. Аппроксимируем $F(x)$ эмпирической функцией $F_N(x)=(1/N)\sum_{i=1}^{N} f(x,\theta_i)$, где θ_i – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0;1]$ случайные величины.

Результаты минимизации $F_N(x)$ методом ветвей и границ с использованием различных минорант и способов оценки снизу для фиксированного числа испытаний $N = 300$ представлены в табл. 3. Результаты работы алгоритма, когда число испытаний N пропорционально числу итераций, представлены в табл. 4.

ТАБЛИЦА 3. Работа метода ветвей и границ при $N = 300$

Вид минорант	Характеристики	Вид оценки снизу					
		Φ_3	Φ_4	Φ_9	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{13}
Параболоид	Итерации	20	32	31	20	19	26
Конус	Итерации	1991	3935	3886	2041	1961	1973

ТАБЛИЦА 4. Оценка алгоритма, когда N пропорционально итерациям

Итерации	Φ_3		Φ_4		Φ_9	
	Алгоритмическая точность	Точность	Алгоритмическая точность	Точность	Алгоритмическая точность	Точность
10	22.645	11.656	321.518	186.017	321.518	186.017
20	0.095	2.091	4.221	0.842	3.423	0.842
50	0.049	0.715	0.056	0.709	0.018	0.678
100	0.001	0.452	0.000	0.452	0.006	0.445
200	0.005	0.412	0.069	0.359	0.055	0.343
300	0.009	0.335	0.009	0.335	0.011	0.300
	Φ_{11}		Φ_{12}		Φ_{13}	
10	22.645	11.656	6.426	1.920	35.065	11.656
20	0.095	2.091	0.117	2.093	0.057	2.007
50	0.049	0.715	0.049	0.715	0.054	0.709
100	0.001	0.452	0.001	0.452	0.001	0.452
200	0.073	0.356	0.073	0.356	0.068	0.359
300	0.009	0.335	0.009	0.335	0.009	0.335

Заключение. В работе обоснован метод ветвей и границ для решения задачи стохастической глобальной оптимизации с целевой функцией типа математического ожидания или вероятности. Исследованы границы оптимальных значений таких целевых функций, построенные с помощью касательных минорант. В частности, указан способ вычисления касательных минорант для таких функций, а именно, в качестве минорант функции математического ожидания можно брать математическое ожидание стохастических касательных минорант подынтегральной функции. Здесь ситуация подобна той, что возникает при вычислении градиентов интегральных функционалов. Вычислить градиент или миноранту интегрального функционала может быть весьма трудно, а вычислить (стохастический) градиент или (стохастическую) миноранту подынтегральной функции может быть сравнительно легко. В работе показано также, что в некоторых случаях операции взятия минимума или максимума можно вносить под знак математического ожидания. Предлагается аппроксимировать исходную целевую функцию ее эмпирической оценкой. На численных примерах показано, что использование касательных параболоидов (в одномерном случае парабол) значительно повышает эффективность метода по сравнению с методами, использующими касательные конусы.

В.І. Норкін, Б.О. Онищенко

МЕТОД ГІЛОК І МЕЖ З МІНОРАНТНИМИ ОЦІНКАМИ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОЇ ГЛОБАЛЬНОЇ ОПТИМИЗАЦІЇ

У роботі обґрунтовано метод гілок і меж для розв'язування задачі стохастичної глобальної оптимізації з цільовою функцією типу математичного очікування або ймовірності. Досліджені межі оптимальних значень таких функцій, які побудовані за допомогою дотичних мінорант. У ролі мінорант використовуються математичні сподівання стохастичних дотичних мінорант підінтегральної функції. Проведено чисельне порівняння різних варіантів методу.

V.I. Norkin, B.O. Onischenko

A BRANCH AND BOUND METHOD WITH MINORANT ESTIMATES USED TO SOLVE STOCHASTIC GLOBAL OPTIMIZATIONON PROBLEMS

The paper validates a branche and bound method for a stochastic global optimization problem with an objective function in the form of mathematical expectation or probability. Bounds of the best values of such objective function, built on the basis of tangent minorants, are investigated. It is shown that, as a tangent minorant for such function, one can take a mathematical expectation of stochastic tangent minorants of an intergrand. Different variants of the method are compared on the basis of numerical examples.

1. *Horst R., Tuy H.* Global Optimization (Deterministic Approaches). 3[rd], revised and enlarged edition. – Berlin: Springer Verlag, 1996. – 600 p.
2. *Данилин Ю .М., Пиявский А. С.* Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967. – Вып. 2. – С. 25–37.
3. *Пиявский С.А.* Алгоритм отыскания абосолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967. – Вып. 2. – С. 13–24.
4. *Норкин В.И.* О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – **32**, № 7. – С. 992–1007.
5. *Khamisov O.* On Optimization Properties of Functions, with a Concave Minorant // J. Of Global Optimization. – 1999. – **14**, № 1. – P. 79–101.

Получено 05.08.2003

Об авторах:

Норкин Владимир Иванович,
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
http://www.i.com.ua/~norkin

Онищенко Борис Олегович,
аспирант Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
boris@cdu.edu.ua