Компьютерная математика

УДК 519.853.4

В.И. НОРКИН, Б.О. ОНИЩЕНКО

О МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ПРИБЛИЖЕННЫХ ГРАНИЦ

В работе рассматривается задача стохастической глобальной оптимизации, в которой вероятностная мера случайных параметров зависит от оптимизируемых переменных. Указаны способы построения касательных минорант для целевых функций такого вида. Описан вариант метода ветвей и границ с приближенными минорантными оценками оптимальных значений целевой функции. Представлены результаты численных экспериментов.

Введение. В работе рассматривается задача глобальной оптимизации функции математического ожидания

$$F(x) = E_x f(x,\theta) = \int_{\Theta_x} f(x,\theta) P_x(d\theta), \quad (1)$$

с вероятностной мерой, зависящей от переменной x, методом ветвей и границ, в котором используются не точные, а приближенные оценки ветвей.

В случае зависимости от x вероятностной меры, нельзя для вычисления математического ожидания функции $f(x,\theta)$ в (1) воспользоваться методом эмпирических аппроксимаций [1], так как для каждого нового значения x нужно проводить свои наблюдения случайного параметра θ. Поэтому, в алгоритме отыскания глобального минимума функции $F(x)$ будут использоваться приближенные оценки снизу ее значений, построенные с помощью касательных в точках y минорант $\phi(x,y,\theta)$ функции $f(x,\theta)$, как источника глобальной информации о ней.

Определение 1 [2]. Пусть X – топологическое пространство, функции $F(x), x\in X$, и $\varphi(x,y)$, $x\in X$, $y\in X$ связаны условиями:

(i) $F(x) \ge \varphi(x,y)$ для всех $x\in X$, $y\in X$;

(ii) $F(y) = \varphi(y,y)$ для всех $y\in X$;

(iii) функция $\varphi(x,y)$ непрерывна по (x,y).

Тогда функции $\{\varphi(\cdot,y),\ y\in X\}$ называются касательными минорантами для $F(x)$.

Определение 2. Функция $\phi(x,y,\omega)$, зависящая от случайного параметра ω, называется стохастической касательной минорантой для $F(x)$, если ее математическое ожидание $\Phi(x,y)=E_{\omega}\phi(x,y,\omega)$ является касательной минорантой для $F(x)$.

Замечание 1. Аналогично определяются (стохастические) касательные мажоранты. Піявский [3] рассматривал непрерывные по (x,y) миноранты, Норкин [2] изучал непрерывные по x равностепенно по y миноранты, а Хамисов [4] рассматривает вогнутые, возможно, разрывные по x миноранты.

Достаточно широкий класс задач принятия решений в условиях неопределенности описывается моделями типа (1), в которых вероятности распределения случайных параметров зависят от значения детерминированных переменных. Ниже представлены некоторые примеры таких задач.

Пример 1 (распределение сервисных центров). Пусть множество $X\subset R^n$ – набор возможных местоположений сервисных центров, используемых для обслуживания клиентов, расположенных в точках $\theta\in\Theta\subset R^m$. Стоимость обслуживания клиента, расположенного в точке θ сервисным центром в x равняется $\psi(x,\theta)$, где $\psi: X\times\Theta\to R$ – измеримая по второму аргументу функция. Если есть n сервисных центров расположенных в $x^1,\dots,x^n\in X$, то стоимость обслуживания клиентов равняется $f(x,\theta)=\min_{1\le j\le n}\psi(x^j,\theta)$, $x=\left(x^1,\dots,x^n\right)$. Предполагается, что распределение P_x клиентов из множества Y – известная функция, зависящая от расположения сервисных центров $x=\left(x^1,\dots,x^n\right)$. Цель состоит в том, чтобы разместить n сервисных центров таким способом, чтобы общая стоимость обслуживания всех клиентов была минимальной:

$$\left[F(x)=\int_Y f(x,\theta)dP_x(\theta)\right]\to\min_{x\in X^n}.$$

Распределение $p(\theta)$ клиентов при ограничении $a(\theta)$ на емкость позиции θ может быть найдено как решение задачи:

$$\int_\Theta p(\theta)f(x,\theta)d\theta\to\min_{\{p(\cdot)\}},$$

$$0\le p(\theta)\le a(\theta),\ \theta\in\Theta;\int_\Theta p(\theta)d\theta=b.$$

Обозначим $p_x(\theta)$, $\theta\in\Theta$ – оптимальное решение этой задачи, $\int_\Theta p_x(\theta)d\theta=b$. Тогда задача оптимального распределения сервисных центров будет иметь вид:

$$F(x)=E_x f(x,\theta)=\frac{1}{b}\int_\Theta p_x(\theta)f(x,\theta)d\theta\to\min_{x\in X^n}.$$

Пример 2 (управление сценариями). Предположим, что есть конечный набор возможных сценариев Θ, индексированных параметром θ. Вероятности $p=\{p_\theta,\theta\in\Theta\}$ реализации этих сценариев не фиксированы, но выбираются их множества $p\in P=\left\{p_\theta: 0\le p_\theta\le a_\theta,\theta\in\Theta;\sum_{\theta\in\Theta}p_\theta=1\right\}$.

Предположим, что стоимость выполнения сценария с распределением вероятности p задана функцией $c(p)$. Каждый сценарий предполагает некоторые затраты $f_\theta(x,\omega)$, зависящие от значения переменной $x \in X$ и случайной переменной ω_θ, определенной на зависящем от θ вероятностном пространстве $(\Omega_\theta, \Sigma_\theta, P_\theta)$. Обозначим $f(x)=\left\{\phi_\theta(x)=E_{\omega_\theta} f_\theta(x,\omega), \theta \in \Theta\right\}$. Тогда проблема состоит в поиске вероятностей $p=\{p_\theta, \theta \in \Theta\}$ исхода сценариев и решения x для минимизации ожидаемых затрат

$$\left[pf(x)+c(p)=c(p)+\sum\nolimits_{\theta\in\Theta} p_\theta \cdot \phi_\theta(x)\right] \to \min\nolimits_{p\in P, x\in X}.$$

При проведении предварительной линейной минимизации по p, приводящей к оптимальному распределению $p^*(x)$, задача переписывается в форме:

$$\left[F(x)=\min\nolimits_{p\in P}\left(c\left(p^*(x)\right)+pf(x)\right)=c\left(p^*(x)\right)+p^*(x)f(x)\right] \to \min\nolimits_{x\in X}.$$

Эта задача является общей многоэкстремальной задачей.

Пример 3 (планирование производства в условиях неопределенности). Большая фирма может максимизировать свою ожидаемую прибыль $F(x,y)=E_{\omega_x}\left[f(x,y,\omega_x)=\omega_x x - cy\right]$ с помощью выбора производственно-потребительского плана $\{x,y\} \in Z:=\{x \ge 0: Ax \le y,\ y \in Y\}$, где x – план производства товара; y – план потребления ресурсов; c – вектор текущих цен использованных ресурсов y; ω_x – вектор случайных будущих рыночных цен произведенных товаров, зависящих от объема производства x.

Пример 4 (двухэтапная задача стохастической оптимизации). Двухэтапная задача стохастической оптимизации с простой коррекцией имеет форму

$$\left[F(x)=cx+E_{\omega_x}\min\nolimits_{y\in Y(x,\omega_x)} q(\omega_x)y\right] \to \min\nolimits_{x\in X},$$

где $Y(x,\omega_x)=\{y \ge 0: A(\omega_x)x \le b(\omega_x)+y\}$, x – вектор переменных первого этапа; y – вектор переменных второго этапа (вектор коррекции); $A(\omega_x), b(\omega_x), q(\omega_x)$ – случайная матрица и векторы соответствующих размерностей, зависящие от случайной переменной ω_x, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega_x, \Sigma_x, P_x)$, которое зависит от решения x первого этапа.

Пример 5 (максимизация среднего времени жизни сети). Задача имеет вид

$$\max\nolimits_{x\in X}\left[F(x)=E_\tau f(\tau)\right], \tag{2}$$

где $f(\tau)$ – функция случайного времени жизни сети; x – вектор оптимизируемых параметров, например, инвестиции ресурсов в элементы сети; E_τ – символ математического ожидания по τ. Функция $f(\tau)$ имеет вид

$$f(\tau)=\max\nolimits_{z\in Z}\min\nolimits_{e\in z}\tau_{ze}(x,\omega), \tag{3}$$

где z – путь из конечного множества путей Z, соединяющих "вход" и "выход" сети; $\tau_{ze}(x,\omega)=t(x_{ze})\ln\dfrac{1}{1-\omega_{ze}}$ – случайное экспоненциально распределенное со средним $t(x_{ze})=c_{ze}x_{ze}$ время жизни элемента e пути z; $\omega=\{\omega_{ze}\}$ – вектор независимых случайных чисел, равномерно распределенных на $[0,1]$; c_{ze} – неотрицательные действительные числа. Очевидно, случайное время жизни элемента сети зависит как от случайного параметра ω_{ze}, так и от вложенных в него инвестиций x_{ze}. Проблема состоит в нахождении глобального максимума $F(x)$ на допустимом множестве X. При этом

$$X=\left\{x\in R^{m\times n}\,\middle|\, x_{ze}\ge 0,\ z=\overline{1,m},\ e=\overline{1,n(z)},\ \sum\nolimits_{z=1}^{m}\sum\nolimits_{e=1}^{n(z)}x_{ze}\le R,\ R\ge 0\right\},\qquad (4)$$

где m – количество путей соединяющих "вход" и "выход" сети; $n(z)$ – количество элементов в пути z; R – инвестиции, вложенные в элементы сети.

Касательные миноранты для функций математического ожидания с мерой, зависящей от x. Если мера не зависит от x, то касательные миноранты $\Phi(x,y)$ функции $F(x)=Ef(x,\omega)$ легко вычислить через касательные миноранты $\varphi(x,y,\omega)$ подынтегральных функций, а именно, $\Phi(x,y)=E\varphi(x,y,\omega)$ [1, 5].

1. Пусть $\Theta_x=\left[a(x),b(x)\right]\subset R$, функция распределения $P_x(\theta)$ строго монотонна и непрерывна для всех $x\in X$, $P_x(a(x))=0$, $P_x(b(x))=1$. Тогда функция

$$F(x)=E_xf(x,\theta)=\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,\theta)dP_x(\theta)$$

с помощью замены переменной $\xi=P_x(\theta)$ может быть записана в виде

$$F(x)=\int_0^1 f\left(x,P_x^{-1}(\xi)\right)d\xi\,.$$

Касательные миноранты функции $F(x)$ могут быть вычислены с помощью касательных минорант подынтегральной сложной функции $g(x,\xi)=f\left(x,P_x^{-1}(\xi)\right)$.

2. Пусть в предыдущем примере функция $f(x,\theta)=f(\theta)$ не зависит от x и является выпуклой и дифференцируемой по θ с производной $f_\theta'(\theta)\ge 0$, $\theta\in\Theta$, функция $P_x^{-1}(\xi)$ допускает касательные в $y\in X$ миноранты $\psi(x,y,\xi)$ для всех $\xi\in[0,1]$. Тогда для всех $\theta,\overline{\theta}$ имеет место $f(\theta)\ge f(\overline{\theta})+f_\theta(\overline{\theta})\left(\theta-\overline{\theta}\right)$. Значит

$$f(P_x^{-1}(\xi))\ge f(P_y^{-1}(\xi))+f_\theta(P_y^{-1}(\xi))\left(P_x^{-1}(\xi)-P_y^{-1}(\xi)\right)\ge$$

$$\ge f(P_y^{-1}(\xi))+f_\theta(P_y^{-1}(\xi))\left(\psi(x,y,\xi)-P_y^{-1}(\xi)\right)=$$

$$=f(P_y^{-1}(\xi))-f_\theta(P_y^{-1}(\xi))P_y^{-1}(\xi)+f_\theta(P_y^{-1}(\xi))\psi(x,y,\xi),$$

и, таким образом, функция

$$\varphi(x,y,\xi)=f(P_y^{-1}(\xi))-f_\theta(P_y^{-1}(\xi))P_y^{-1}(\xi)+f_\theta(P_y^{-1}(\xi))\psi(x,y,\xi)$$

является касательной минорантой для $f(P_x^{-1}(\xi))$.

3. Пусть $\Theta_x = [a(x), b(x)] \subseteq R$, $P_x(a(x)) = 0$, $a(x) \geq -\infty$ и $P_x(b(x)) = 1$, $b(x) \leq +\infty$, функция $f(x,\theta)$, ограничена по $\theta \in [a(x), b(x)]$. Интегрированием по частям функции $F(x) = E_x f(x,\theta)$ можно избавиться от зависимости меры от переменной:

$$F(x) = E_x f(x,\theta) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,\theta) dP_x(\theta) =$$

$$= f(x, b(x)) - \int_{a(x)}^{b(x)} f_\theta(x,\theta) P_x(\theta) d\theta = f(x, b(x)) - \int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(x,\theta) P_x(\theta) d\theta.$$

4. Предположим, что $\Theta_x = \Theta$, мера $P_x(\theta)$ имеет плотность $p_x(\theta) > 0$, функции $f(x,\theta)$ и $p_x(\theta)$ допускают касательные миноранты вида

$$\varphi(x,y,\theta) = f(y,\theta) - \phi_1(x,y,\theta),\ \psi(x,y,\theta) = p_y(\theta) - \phi_2(x,y,\theta) \geq 0,$$

где

$$\phi_1(x,y,\theta) \cdot \phi_2(x,y,\theta) \geq 0 \text{ и } \phi_1(y,y,\theta) = \phi_2(y,y,\theta) = 0 \text{ для любых } x, y, \theta.$$

Зафиксируем какую-нибудь точку y, тогда

$$F(x) = E_x f(x,\theta) = \int_\Theta f(x,\theta) \frac{p_x(\theta)}{p_y(\theta)} dP_y(\theta) \geq$$

$$\geq \int_\Theta \left(f(y,\theta) - \phi_1(x,y,\theta) - \frac{f(y,\theta)}{p_y(\theta)} \phi_2(x,y,\theta) \right) dP_y(\theta).$$

Очевидно, $\Phi(x,y) = E_y \phi(x,y,\theta)$, где

$$\phi(x,y,\theta) = f(y,\theta) - \phi_1(x,y,\theta) - \frac{f(y,\theta)}{p_y(\theta)} \phi_2(x,y,\theta)$$

является стохастической касательной в точке y минорантой для $F(x)$.

Метод ветвей и границ с приближенными оценками. Рассматривается задача глобальной минимизации непрерывной функции $F(x)$ на множестве $X \subset R^n$. Для ее решения ниже будет применен метод ветвей и границ, использующий приближенные оценки $L_M(Z)$ оптимальных значений функций $F(x)$ на подмножествах $Z \subset X$ специального вида (симплексах, параллелепипедах и т.п.). Функции множеств $L_M(Z)$ полунепрерывны снизу и сходятся к непрерывным функциям множеств $L(Z)$, являющихся оценками минимального значения $F(x)$ на Z. Сделаем следующие предположения:

а) пусть $L(Z)$ – точная оценка снизу оптимального значения $F(x)$ на Z, $L(Z) \leq \min_{x \in Z} F(x)$, причем $L(Z) = F(Z)$, если множество Z является точкой;

б) для любой последовательности множеств $X_N \subset X$, $N = 1, 2, \ldots$, сходящейся в топологии Куратовского к некоторому множеству $Z \in X$ и любой последовательности индексов $M_N(X_N) \to \infty$, имеет место

$$\lim_{N\to\infty} L_{M_N(X_N)}(X_N) \le \lim_{N\to\infty} L(X_N) = L(Z),$$

и, если множество Z является точкой, то

$$\lim_{N\to\infty} L_{M_N(X_N)}(X_N) = \lim_{N\to\infty} L(X_N) = L(Z).$$

В качестве оценок снизу $L_{M(Z)}(Z)$ и значения $\min_{x\in Z}[F(x) = E_x f(x,\theta)]$ (где мера P_x в математическом ожидании E_x зависит от x) может выступать следующая величина:

$$L_{M(Z)}(Z) = \frac{1}{M(Z)} \sum\nolimits_{k=1}^{M(Z)} \min_{x\in Z} \phi(x, \overline{y}, \theta_{\overline{y}k}), \tag{5}$$

где $\overline{y} \in Z$, $\theta_{\overline{y}k}$ – независимые наблюдения случайного параметра θ с мерой $P_{\overline{y}}$ зафиксированной в точке $\overline{y}$, а $\phi(x,y,\theta)$ – стохастическая касательная в точке y миноранта функции $F(x) = E_x f(x,\theta)$.

Алгоритм. В методе ветвей и границ на каждой итерации N имеется текущее разбиение Σ_N исходного множества X. Для каждого элемента $Y \in \Sigma_N$ имеются текущая нижняя $L_{M_N(Y)}(Y)$ приближенная оценка оптимального значения $F^* = \min_{y\in Y} F(y)$. Обозначим Y_N – рекордное множество разбиения Σ_N, т. е. $L_{M_N(Y_N)}(Y_N) = \min_{Y\in\Sigma_N} L_{M_N(Y)}(Y)$. Алгоритм метода состоит из последовательности следующих операций.

Шаг 1 (ветвление). Выбирается рекордное множество Y_N,

$$L_{M_N(Y_N)}(Y_N) = \min_{Y\in\Sigma_N} L_{M_N(Y)}(Y).$$

Множество Y_N представляется в виде объединения нескольких подмножеств $Y_{Nk} \subset Y_N$, $k = 1,2,\ldots$, так, что $Y_N = \bigcup_k Y_{Nk}$. Таким образом новое разбиение имеет вид $\Sigma_{N+1} = \left(\Sigma_N \setminus Y_N\right) \bigcup \left(\bigcup_k Y_{Nk}\right)$.

Шаг 2 (оценка). Для элементов $Y \in \Sigma_{N+1}$ нового разбиения Σ_{N+1} перевычисляются приближенные оценки $L_{M_{N+1}(Y)}(Y)$ оптимального значения F^*_{N+1} функции $F_{N+1}(y)$ на элементе Y.

Это метод ветвей и нижних границ, на каждой его итерации используются приближенные оценки подмножеств.

Теорема 1 (о сходимости). Пусть $F(x)$ – непрерывная функция, функции множеств $L_N(Z)$ и $L(Z)$ удовлетворяют предположениям а), б), а для любого подмножества разбиения Z, возникающего в ходе работы алгоритма, выполнено $\lim_{N\to\infty} M_N(Z) = \infty$. Предположим, что разбиения осуществляются так, что диаметры получающихся рекордных множеств Y_N стремятся к нулю, при неограниченном числе делений. Тогда последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна и для любой предельной точки y рекордных множеств Y_N выполнено:

$$F(y) = \min_{x\in X} F(x).$$

Доказательство. Последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна, так как подмножества $Y \in \Sigma_N$ не удаляются. Обозначим Y_N^* – подмножество разбиения, содержащее глобальный минимум x^*, тогда из предположения а) следует:

$$L(Y_N^*) \le \min_{x \in Y_N^*} F(x) = F(x^*),$$

$$L_{M_N(Y_N^*)}(Y_N^*) \le \min_{x \in Y_N^*} F(x) + L_{M_N(Y_N^*)}(Y_N^*) - L(Y_N^*) = F(x^*) + \varepsilon_N\left(Y_N^*\right),$$

где $\varepsilon_N\left(Y\right) = L_{M_N(Y)}(Y) - L(Y)$. Очевидно, $diam(Y_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Предположим, что $\lim_{k \to \infty} Y_{N_k} = y$. Покажем, что y – оптимальная точка задачи. Предположим противное, что $F(y) - \min_{x \in X} F(x) = \varepsilon > 0$. Так как из предположений а), б) следует, что $\lim_{k \to \infty} L(Y_{N_k}) = F(y)$ и, таким образом, для достаточно больших k имеет место

$$L(Y_{N_k}) \ge F(y) - \varepsilon / 2 \ge \min_{x \in X} F(x) + \varepsilon / 2.$$

Таким образом, для достаточно больших k

$$L(Y_{N_k}) \ge \min_{x \in X} F(x) + \varepsilon / 2 \ge L(Y_{N_k}^*) + \varepsilon / 2,$$

где $x^* \in Y_{N_k}^*$. Заменяя точные нижние оценки подмножеств Y_{N_k} и $Y_{N_k}^*$ на приближенные, получаем

$$L_{M_{N_k}(Y_{N_k})}(Y_{N_k}) \ge L_{M_{N_k}(Y_{N_k}^*)}(Y_{N_k}^*) + \varepsilon / 2 + L_{M_{N_k}(Y_{N_k})}(Y_{N_k}) - L(Y_{N_k}) + L(Y_{N_k}^*) -$$

$$-L_{M_{N_k}(Y_{N_k}^*)}(Y_{N_k}^*) = L_{M_{N_k}(Y_{N_k}^*)}(Y_{N_k}^*) + \varepsilon / 2 + \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}\right) - \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}^*\right).$$

Так как по построению алгоритма $Y_{N_k}^*$ монотонно убывают и, таким образом, сходятся к некоторому предельному множеству, то согласно предположению б) $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}\right) = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}^*\right) = 0$, получаем противоречие, что Y_{N_k} – рекордное подмножество. Полученное противоречие доказывает теорему.

Численные расчеты. Для численных экспериментов рассмотрим задачу из примера 5. Обозначим $\tau_z(x,\omega) = \min_{e \in z} \tau_{ze}(x,\omega)$ – случайное время жизни пути z, $e(x,\omega) \in \arg\min_{e \in z} \tau_{ze}(x,\omega)$. Тогда функции

$$\varphi(x, y, z, \omega) = \tau_{ze(y,\omega)}(x,\omega)$$

являются касательными в точках y мажорантами для $\tau_z(x,\omega)$, функции

$$\phi(x, y, \omega) = \max_{z \in Z} \tau_{ze(y,\omega)}(x,\omega)$$

являются стохастическими касательными в точках y мажорантами для функции $f_z(x,\omega) = \max_{z \in Z} \tau_z(x,\omega)$ – случайного времени жизни сети. Функции

$$\phi(x, y) = E_\tau \phi(x, y, \omega)$$

являются касательными в точках y мажорантами для $F(x)$.

$$\lim_{N\to\infty} L_{M_N(X_N)}(X_N) \le \lim_{N\to\infty} L(X_N) = L(Z),$$

и, если множество Z является точкой, то

$$\lim_{N\to\infty} L_{M_N(X_N)}(X_N) = \lim_{N\to\infty} L(X_N) = L(Z).$$

В качестве оценок снизу $L_{M(Z)}(Z)$ и значения $\min_{x\in Z}[F(x)=E_x f(x,\theta)]$ (где мера P_x в математическом ожидании E_x зависит от x) может выступать следующая величина:

$$L_{M(Z)}(Z) = \frac{1}{M(Z)}\sum_{k=1}^{M(Z)} \min_{x\in Z} \phi(x,\overline{y},\theta_{\overline{y}k}), \tag{5}$$

где $\overline{y}\in Z$, $\theta_{\overline{y}k}$ – независимые наблюдения случайного параметра θ с мерой $P_{\overline{y}}$ зафиксированной в точке $\overline{y}$, а $\phi(x,y,\theta)$ – стохастическая касательная в точке y миноранта функции $F(x)=E_x f(x,\theta)$.

Алгоритм. В методе ветвей и границ на каждой итерации N имеется текущее разбиение Σ_N исходного множества X. Для каждого элемента $Y\in\Sigma_N$ имеются текущая нижняя $L_{M_N(Y)}(Y)$ приближенная оценка оптимального значения $F^* = \min_{y\in Y} F(y)$. Обозначим Y_N – рекордное множество разбиения Σ_N, т. е. $L_{M_N(Y_N)}(Y_N) = \min_{Y\in\Sigma_N} L_{M_N(Y)}(Y)$. Алгоритм метода состоит из последовательности следующих операций.

Шаг 1 (ветвление). Выбирается рекордное множество Y_N,

$$L_{M_N(Y_N)}(Y_N) = \min_{Y\in\Sigma_N} L_{M_N(Y)}(Y).$$

Множество Y_N представляется в виде объединения нескольких подмножеств $Y_{Nk}\subset Y_N$, $k=1,2,\ldots$, так, что $Y_N = \bigcup_k Y_{Nk}$. Таким образом новое разбиение имеет вид $\Sigma_{N+1} = \left(\Sigma_N \setminus Y_N\right)\bigcup\left(\bigcup_k Y_{Nk}\right)$.

Шаг 2 (оценка). Для элементов $Y\in\Sigma_{N+1}$ нового разбиения Σ_{N+1} перевычисляются приближенные оценки $L_{M_{N+1}(Y)}(Y)$ оптимального значения F^*_{N+1} функции $F_{N+1}(y)$ на элементе Y.

Это метод ветвей и нижних границ, на каждой его итерации используются приближенные оценки подмножеств.

Теорема 1 (о сходимости). Пусть $F(x)$ – непрерывная функция, функции множеств $L_N(Z)$ и $L(Z)$ удовлетворяют предположениям а), б), а для любого подмножества разбиения Z, возникающего в ходе работы алгоритма, выполнено $\lim_{N\to\infty} M_N(Z)=\infty$. Предположим, что разбиения осуществляются так, что диаметры получающихся рекордных множеств Y_N стремятся к нулю, при неограниченном числе делений. Тогда последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна и для любой предельной точки y рекордных множеств Y_N выполнено:

$$F(y) = \min_{x\in X} F(x).$$

Доказательство. Последовательность $\{Y_N\}$ бесконечна, так как подмножества $Y \in \Sigma_N$ не удаляются. Обозначим Y_N^* – подмножество разбиения, содержащее глобальный минимум x^*, тогда из предположения а) следует:

$$L(Y_N^*) \le \min_{x \in Y_N^*} F(x) = F(x^*),$$

$$L_{M_N(Y_N^*)}(Y_N^*) \le \min_{x \in Y_N^*} F(x) + L_{M_N(Y_N^*)}(Y_N^*) - L(Y_N^*) = F(x^*) + \varepsilon_N\left(Y_N^*\right),$$

где $\varepsilon_N\left(Y\right) = L_{M_N(Y)}(Y) - L(Y)$. Очевидно, $diam(Y_N) \to 0$ при $N \to \infty$. Предположим, что $\lim_{k\to\infty} Y_{N_k} = y$. Покажем, что y – оптимальная точка задачи. Предположим противное, что $F(y) - \min_{x \in X} F(x) = \varepsilon > 0$. Так как из предположений а), б) следует, что $\lim_{k\to\infty} L(Y_{N_k}) = F(y)$ и, таким образом, для достаточно больших k имеет место

$$L(Y_{N_k}) \ge F(y) - \varepsilon/2 \ge \min_{x \in X} F(x) + \varepsilon/2 .$$

Таким образом, для достаточно больших k

$$L(Y_{N_k}) \ge \min_{x \in X} F(x) + \varepsilon/2 \ge L(Y_{N_k}^*) + \varepsilon/2,$$

где $x^* \in Y_{N_k}^*$. Заменяя точные нижние оценки подмножеств Y_{N_k} и $Y_{N_k}^*$ на приближенные, получаем

$$L_{M_{N_k}(Y_{N_k})}(Y_{N_k}) \ge L_{M_{N_k}(Y_{N_k}^*)}(Y_{N_k}^*) + \varepsilon/2 + L_{M_{N_k}(Y_{N_k})}(Y_{N_k}) - L(Y_{N_k}) + L(Y_{N_k}^*) -$$

$$-L_{M_{N_k}(Y_{N_k}^*)}(Y_{N_k}^*) = L_{M_{N_k}(Y_{N_k}^*)}(Y_{N_k}^*) + \varepsilon/2 + \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}\right) - \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}^*\right).$$

Так как по построению алгоритма $Y_{N_k}^*$ монотонно убывают и, таким образом, сходятся к некоторому предельному множеству, то согласно предположению б) $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}\right) = \lim_{k\to\infty} \varepsilon_{N_k}\left(Y_{N_k}^*\right) = 0$, получаем противоречие, что Y_{N_k} – рекордное подмножество. Полученное противоречие доказывает теорему.

Численные расчеты. Для численных экспериментов рассмотрим задачу из примера 5. Обозначим $\tau_z(x,\omega) = \min_{e \in z} \tau_{ze}(x,\omega)$ – случайное время жизни пути z, $e(x,\omega) \in \arg\min_{e \in z} \tau_{ze}(x,\omega)$. Тогда функции

$$\varphi(x,y,z,\omega) = \tau_{ze(y,\omega)}(x,\omega)$$

являются касательными в точках y мажорантами для $\tau_z(x,\omega)$, функции

$$\phi(x,y,\omega) = \max_{z \in Z} \tau_{ze(y,\omega)}(x,\omega)$$

являются стохастическими касательными в точках y мажорантами для функции $f_z(x,\omega) = \max_{z \in Z} \tau_z(x,\omega)$ – случайного времени жизни сети. Функции

$$\phi(x,y) = E_\tau \phi(x,y,\omega)$$

являются касательными в точках y мажорантами для $F(x)$.

Варианты сетей для проведения расчетов и их параметры представлены в табл. 1. Для удобства введена сквозная нумерация элементов сети. Суммарное количество инвестиций в каждую из сетей $R=1$. Не трудно заметить, что допустимое множество X в (4) представляет собой симплекс с вершинами в начале координат и на координатных осях на расстоянии R от начала координат. Поэтому ветвление рекордного множества будет осуществляться симплексами по наибольшему ребру. Количество наблюдений случайных параметров для всех точек одинаково и равно 300. Точность расчетов $\varepsilon=10^{-6}$. Результаты работы алгоритма представлены в табл. 2.

ТАБЛИЦА 1. Виды и параметры сетей

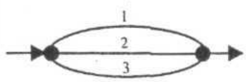
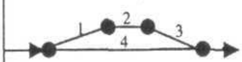
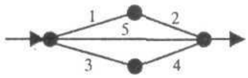
	a)	b)	c)
Вид сети			
Параметры	$c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=10$	$c_1=7$, $c_2=8$, $c_3=5$, $c_4=3$	$c_1=2$, $c_2=1$, $c_3=5$, $c_4=8$, $c_5=1$

ТАБЛИЦА 2. Результаты работы алгоритма

Вид сети	Количество переменных	Количество итераций	x^*
a)	3	325	(0,015254; 0,000218; 0,967967)
b)	4	605	(0,001933; 0,006233; 0,059384; 0,930717)
c)	5	1060	(0,007926; 0,005440; 0,595933; 0,373085; 0,010956)

Заключение. В работе рассмотрена задача стохастической глобальной оптимизации, в которой вероятностная мера случайных параметров зависит от детерминированных переменных. На практике задачи такого рода возникают довольно часто, и в работе представлены некоторые примеры этих задач. Для решения такого рода задач невозможно использовать метод эмпирических аппроксимаций. Поэтому возникает необходимость использования приближенных оценок значений целевой функции. Мы предлагаем строить такие оценки с помощью касательных минорант подынтегральной функции. Также рассмотрены возможности вычисления касательных минорант для функций математического ожидания с мерой, зависящей от детерминированной переменной. В работе описан алгоритм, использующий вариант стохастического метода ветвей и границ. В нем используются приближенные нижние оценки минимального значения математического ожидания целевой функции, построенные с использованием касательных минорант подынтегральной функции, а также доказана его сходимость. В качестве численного эксперимента решена задача максимизации среднего времени жизни сети.

В.І. НОРКІН, Б.О. ОНИЩЕНКО

ПРО МЕТОД ГІЛОК І НАБЛИЖЕНИХ ГРАНИЦЬ

У роботі розглядається задача стохастичної глобальної оптимізації, у якій імовірнісна міра випадкових параметрів залежить від детермінованих змінних. Зазначені способи побудови дотичних мінорант для функцій такого вигляду. Описаний варіант методу гілок і границь з наближеними мінорантними оцінками оптимальних значень цільової функції. Представлені результати чисельних експериментів.

V.I. NORKIN, B.O. ONISCHENKO

A BRANCH AND APPROXIMATE BOUNDS METHOD

The paper considers a stochastic global optimization problem, in which a probability measure depends on deterministic variables. Some ways to construct tangent minorants for an objective function of the problem are specified. A version of the branch and bound method with approximate minorant lower bounds is described. Numerical experiment results are presented.

1. *Норкин В.И., Онищенко Б.О.* Метод ветвей и границ с минорантными оценками для решения задач стохастической глобальной оптимизации // Компьютерная математика. – Вып. 1. – Киев: Ин-т кибернетики НАН Украины, 2004. – С. 91–101.
2. *Норкин В.И.* О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – **32**, № 7. – С. 992–1007.
3. *Пиявский С.А.* Алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1967. – Вып. 2.– С. 13–24.
4. *Khamisov O.* On Optimization Properties of Functions, with a Concave Minorant // J. of Global Optimization. – 1999. – Vol. 14, N 1. – P. 79–101.
5. *Норкин В.И.* Глобальная стохастическая оптимизация: метод ветвей и вероятностных границ // Методы управления и принятия решений в условиях риска и неопределенности. – Киев: Ин-т кибернетики НАН Украины, 1993. – С. 3–12.

Получено 14.05.2004

Об авторах:

Норкин Владимир Иванович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины,

E-Mail: norkin@d130.icyb.kiev.ua

Онищенко Борис Олегович,

аспирант Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

E-Mail: boris@cdu.edu.ua